

Vorlesung vom 16.04.2013,

Ein Beispiel zur Prädikatenlogik aus der Analysis:

"Stetigkeit" in einem Punkt x_0 :

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ ist (punktweise) stetig in D genau dann wenn in jedem $x_0 \in D$ der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und $= f(x_0)$ ist. Es gilt:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff$ gegeben zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

Epsilon-Delta
gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$

Logik: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\iff \forall x_0 \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Verneinung: $\neg (\dots \Rightarrow \dots)$

Beachte

$A \Rightarrow B \iff$

$\neg A \vee B$

$\iff \exists x \in D \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D: \neg (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

$\iff \exists x_0 \in D \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D: |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$
 $\iff \neg (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Beachte: $\forall x_0 \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: \dots$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \forall x_0 \in D \exists \delta > 0 \forall x \in D: \dots$ (1)

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 \in D \forall x \in D: \dots$ (2)

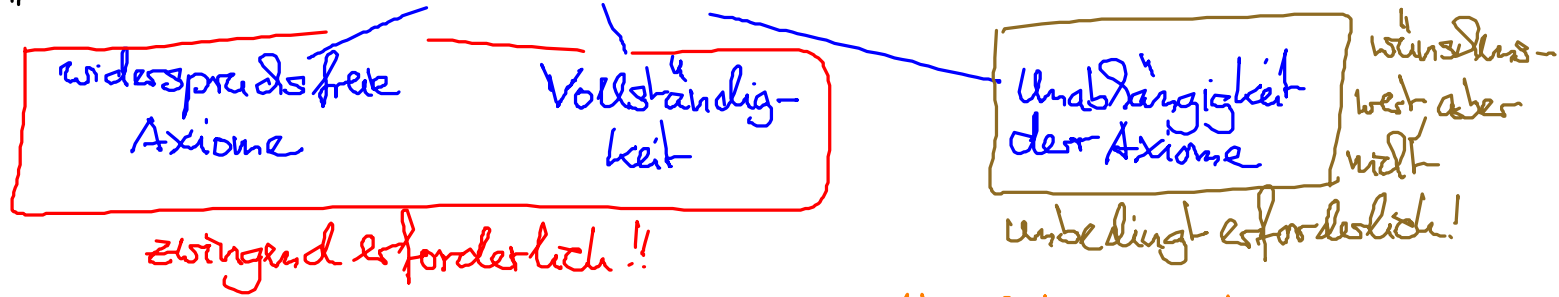
vertauscht!

In (1) ist δ von ε und $x_0 \in D$ abhängig, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$

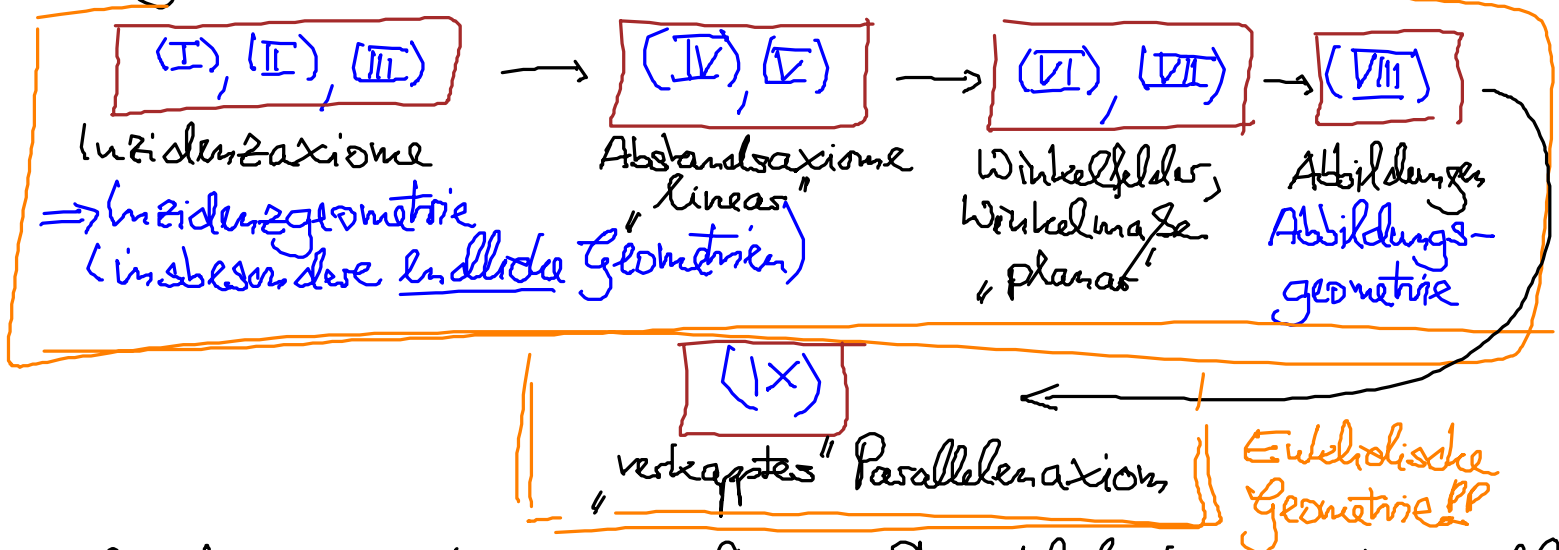
In (2) ist δ universell gültig für alle $x_0 \in D$, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon)$

Definition des gleichmäßigen Stetigkeit

"Fahrplan" zum axiomatischen Aufbau der euklidischen Geometrie:



Insgesamt 9 Axiome: Absolute Geometrie



Wir lernen vor (IX) ein wichtiges nicht-euklidisches Geometrie-Modell kennen: das Poincaré'sche Halbebenenmodell !!

Fangen wir an mit der Inzidenzgeometrie (incidere (lat.) „aufstoßen fallen“)
Es werden einfache mengentheoretische Relationen zwischen „Punkten“ einer Ebene und „Geraden“ in einer Ebene getroffen!

Gegeben: Eine Menge $E \neq \emptyset$, genannt Ebene. Die Elemente $P, Q \in E$

kuriose
Vertau-
sachung

von Groß- und Kleinschreibung
(historisch bedingt!)

nenne $i \in E$ Punkte der Ebene. Geraden in E sind bestimmte
Teilungen $g \in E$. Sei $\mathcal{G} = \{g, h, \dots\}$ die Geradenmenge.

Es gilt: $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(E)$

Mengensystem

Potenzmenge =
System aller möglichen
Teilungen von E !!

Die ersten 3 Inzidenzaxiome:

(I) Auf jeder Geraden liegen mindestens 2 (verschiedene) Punkte
 $\Rightarrow \emptyset, \{P\}$ sind keine Geraden!!

Schreibweise in Prädikatenlogik: $\forall g \in \mathcal{G} : |g| = \text{card } g \geq 2$
 $\Leftrightarrow \forall g \in \mathcal{G} \exists P, Q \in E : P \neq Q \wedge P, Q \in g$

(II) Durch je zwei (verschiedene) Punkte geht genau eine Gerade
ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz der Geometrie
In logischer Formulierung: $\forall P, Q \in E : P \neq Q \Rightarrow \exists! g \in \mathcal{G} : P, Q \in g$

„ $\exists!$ “ bedeutet „es existiert eindeutig“

$\Leftrightarrow \forall P, Q \in E, P \neq Q \exists! g \in \mathcal{G} : P, Q \in g$

$\Leftrightarrow (\forall P, Q \in E, P \neq Q \exists g \in \mathcal{G} : P, Q \in g) \wedge$
„Existenzteil“

$(\forall g, h \in \mathcal{G} : P, Q \in g \wedge P, Q \in h \Rightarrow g = h)$
 $\Leftrightarrow P, Q \in g \cap h$

(III) Es gibt drei nicht auf einer gemeinsamen Geraden gelegene Punkte in
der Ebene.

D.h.: E ist keine Gerade! Außerdem enthält E mindestens
3 Punkte, also $|E| = \text{card } E \geq 3$.

Modelle gibt's dann am Donnerstag in der VL!

ENDE für heute...

[Handwritten signature]