Vorlesung vom 16.04.2013:

Ein Beispiel zur Prädikatenlogik aus der „Analysis“:

„Stetigkeit“ in einem Punkt x_0:

$f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ ist (punktweise) stetig in D genau dann, wenn in jedem $x_0 \in D$ der Grenzwert $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)}$ existiert und $\boxed{= f(x_0)}$ ist. Es gilt:

gegeben

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) :\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

Epsilontik

gilt $\boxed{|\underbrace{f(x)}_{y} - \underbrace{f(x_0)}_{y_0}| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta}$

Logik: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall x_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

Verneinung: $\neg(\ldots \ldots \ldots)$

Beachte
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow$
$\neg A \vee B$

$$\Longleftrightarrow \exists x_0 \in D\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D : \neg(\ldots \Rightarrow \ldots)$$

$$\text{———} \text{"} \text{———} : \neg(\neg |x - x_0| < \delta \vee |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow \exists x_0 \in D\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \neg(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Beachte: $\forall x_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D :$ ——"——

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \boxed{\forall x_0 \in D\ \exists \delta > 0}\ \forall x \in D :$ ——"—— (1)

$\cancel{\Longleftrightarrow}\ \forall \varepsilon > 0\ \boxed{\exists \delta > 0\ \forall x_0 \in D}\ \forall x \in D :$ ——"—— (2)

vertauscht!

In (1) ist δ von ε und $x_0 \in D$ abhängig, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$

In (2) ist δ universell gültig für alle $x_0 \in D$, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon)$

← Definition der gleichmäßigen Stetigkeit

„Fahrplan" zum axiomatischen Aufbau der euklidischen Geometrie:

widerspruchsfreie Axiome — Vollständigkeit

zwingend erforderlich!!

Unabhängigkeit der Axiome

wünschenswert aber nicht unbedingt erforderlich!

Insgesamt 9 Axiome:

Absolute Geometrie

(I), (II), (III) → (IV), (V) → (VI), (VII) → (VIII)

Inzidenzaxiome
⇒ Inzidenzgeometrie (insbesondere endliche Geometrien)

Abstandsaxiome „linear"

Winkelfelder, Winkelmaße „planar"

Abbildungen
Abbildungsgeometrie

(IX)
„verkapptes" Parallelenaxiom

Euklidische Geometrie!!

Wir lernen vor (IX) ein wichtiges nicht-euklidisches Geometriemodell kennen: das Poincarésche Halbebenenmodell!!

Fangen wir an mit der Inzidenzgeometrie (incidere (lat.) „auftreffen, fallen")

Es werden einfache mengentheoretische Relationen zwischen „Punkten" einer Ebene und „Geraden" in einer Ebene getroffen!

Gegeben: Eine Menge $\mathcal{E} \neq \emptyset$, genannt Ebene. Die Elemente $P, Q \in \mathcal{E}$ nenne ich Punkte der Ebene. Geraden in $\mathcal{E}$ sind bestimmte Teilmengen $g \subseteq \mathcal{E}$. Sei $\mathcal{G} = \{g, h, \dots\}$ die Geradenmenge.

Kuriose Verstauschung von Groß- und Kleinschreibung (historisch bedingt!)

Es gilt: $\boxed{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})}$

Mengensystem

Potenzmenge = System aller möglichen Teilmengen von $\mathcal{E}$!!

Die ersten 3 Inzidenzaxiome:

(I) Auf jeder Geraden liegen mindestens 2 (verschiedene) Punkte

$\Rightarrow$ $\emptyset$, $\{P\}$ sind keine Geraden!!

Schreibweise in Prädikatenlogik: $\forall g \in \mathcal{G} : |g| = \operatorname{card} g \geq 2$

$\Leftrightarrow \forall g \in \mathcal{G}\ \exists P, Q \in \mathcal{E} : P \neq Q \wedge \underbrace{P, Q \in g}_{\Leftrightarrow \{P, Q\} \subseteq g}$

(II) Durch je zwei (verschiedene) Punkte geht genau eine Gerade

ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Geometrie

In logischer Formulierung: $\forall P, Q \in \mathcal{E} : P \neq Q \Rightarrow (\exists! g \in \mathcal{G} : P, Q \in g)$

„$\exists!$" bedeutet, „es existiert eindeutig"

$\Leftrightarrow \forall P, Q \in \mathcal{E}, P \neq Q\ \exists! g \in \mathcal{G} : P, Q \in g$

$\Leftrightarrow \big(\forall P, Q \in \mathcal{E}, P \neq Q\ \exists g \in \mathcal{G} : P, Q \in g\big) \wedge$

„Existenzteil"

$\big(\forall g, h \in \mathcal{G} : \underbrace{P, Q \in g \wedge P, Q \in h}_{\Leftrightarrow P, Q \in g \cap h} \Rightarrow g = h\big)$

(III) Es gibt drei nicht auf einer gemeinsamen Geraden gelegene Punkte in der Ebene.

D.h.: $\mathcal{E}$ ist keine Gerade! Außerdem enthält $\mathcal{E}$ mindestens 3 Punkte, also $|\mathcal{E}| = \operatorname{card} \mathcal{E} \geq 3$.

Modelle gibt's dann am Donnerstag in der VL!

ENDE für heute ...