Vorlesung vom 14.05.2013:

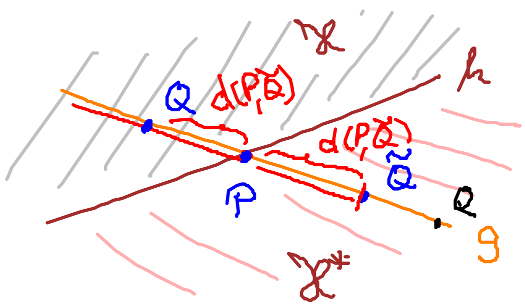
Satz 2.6:

Sei $\mathcal{H} \cup h$ abgeschlossene HE in $\mathcal{E}$, $g \in \mathcal{G}$ mit $g \cap h = \{P\}$ sowie $Q \in \mathcal{H} \cap g$. *)

Dann gilt: $\boxed{g \cap (\mathcal{H} \cup h) = \overrightarrow{PQ}}$ (auf dem Ü-Blatt auch mit „$\overrightarrow{PQ}$" bezeichnet).

Bemerkung zu *):

Die Existenz von $Q \in g \cap \mathcal{H}$ ist gesichert auf folgende Weise:



$\tilde Q \in g$, $\tilde Q \neq P$ ex. nach Ax (I). Dann gilt wegen Ax (VI) und $\tilde Q \notin h$ ($g \cap h = \{P\}$) $\tilde Q \in \mathcal{E} \setminus h = \mathcal{H} \cup \mathcal{H}^*$, $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}^* = \emptyset$.

Falls $\tilde Q \in \mathcal{H}$, dann alles „paletti". Wähle $Q = \tilde Q$.

Falls $\tilde Q \in \mathcal{H}^*$, dann ex. nach Ax (V) auf der Halbgeraden $\overrightarrow{\tilde Q P} \subset g$ ein Punkt $Q \in \overrightarrow{\tilde Q P}$ mit $d(Q,\tilde Q) = 2 \cdot d(P,\tilde Q) > d(P,\tilde Q)$. Dann: $\boxed{P \in \overline{Q\tilde Q}}$ Strecke!

unmöglich!

Dann ist $Q \in \mathcal{H}$, da $Q \notin h$ wegen $Q \neq P$ und im Fall $Q \in \mathcal{H}^*$ wäre $P \in \overline{Q\tilde Q} \subset \mathcal{H}^*$, da $\mathcal{H}^*$ konvex ↯ zu $P \in h$.

Also gilt: $Q \in \mathcal{H} \cap g$ ■

Zum Beweis von Satz 2.6:

Wir zeigen $g \cap (\mathcal{X} \cup h) = \overrightarrow{PQ}$ durch zwei Teilmengenbeziehungen:

(i) z.z.: $\overrightarrow{PQ} \subseteq \mathcal{X} \cup h$ $\quad (\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{PQ}}_{\subseteq g} \subseteq (\mathcal{X} \cup h) \cap g)$,

Sei o.B.d.A. $P <_g Q$. Für jedes $X \in \overrightarrow{PQ}$ ist zu zeigen: $X \in \mathcal{X} \cup h$.

„ohne Beschränkung der Allgemeinheit!"

Wäre $X \notin \mathcal{X} \cup h$, dann $X \in \mathcal{X}^* = \mathcal{E} \setminus (\mathcal{X} \cup h)$

Aus $Q \in \mathcal{X}$, $X \in \mathcal{X}^*$ folgt wegen Ax (VI): $\overline{QX} \cap h = g \cap h = \{P\}$, d.h. $P \in \overline{XQ}$. Nun gilt: $\overrightarrow{PQ} = \{X \in g \mid P <_g X\}$. Für das gewählte $X \in \overrightarrow{PQ}$ gilt wegen $P <_g Q$ ($P <_g Q$) und $P \in \overline{XQ}$: $X <_g P <_g Q$.

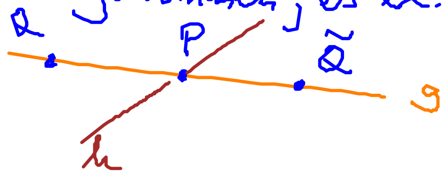
Damit erhalten wir (Transitivität von „$<_g$"): $X <_g P \wedge P <_g X \Rightarrow P <_g P$ ↯

unmöglich, da „$<_g$" areflexiv!! $\quad X \in \overrightarrow{PQ}$

Also: $\overrightarrow{PQ} \subseteq \mathcal{X} \cup h$

(ii) z.z.: $(\mathcal{X} \cup h) \cap g \subseteq \overrightarrow{PQ}$ bzw. $(g \setminus \overrightarrow{PQ}) \cap (\mathcal{X} \cup h) = \emptyset \Leftrightarrow g \setminus \overrightarrow{PQ} \subseteq \mathcal{X}^* = \mathcal{E} \setminus (\mathcal{X} \cup h)$

Angenommen, es ex. $\tilde{Q} \in \mathcal{X} \cup h$ mit $\tilde{Q} \in g \setminus \overrightarrow{PQ}$. Dann wäre $P \in \overline{Q\tilde{Q}}$, $P \neq \tilde{Q}$.



Falls $\tilde{Q} \in h$, dann $g = \overleftrightarrow{P\tilde{Q}} = h$ ↯ zu $g \cap h = \{P\}$

Falls $\tilde{Q} \in \mathcal{X}$, dann folgte mit $Q \in \mathcal{X}$ und $\mathcal{X}$ konvex:

$P \in \overline{Q\tilde{Q}} \subseteq \mathcal{X}$ ↯ zu $P \in h$, $P \notin \mathcal{X}$.

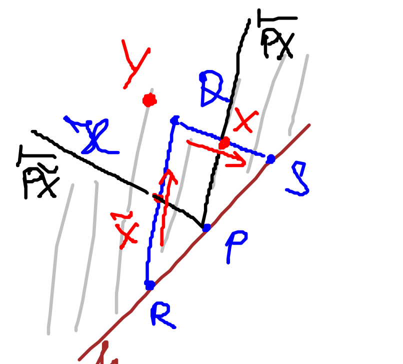
Also: $\tilde{Q} \in (\mathcal{X} \cup h) \cap (g \setminus \overrightarrow{PQ})$ existiert nicht, d.h. $g \setminus \overrightarrow{PQ} \subseteq \mathcal{X}^* = \mathcal{E} \setminus (\mathcal{X} \cup h)$

Aus (i), (ii) folgt: $g \cap (\mathcal{X} \cup h) = \overrightarrow{PQ}$!!

Zum Beweis von Satz 2.8:

Aus Satz 2.7 wissen wir: $\quad \boxed{\mathcal{X} \cup h = \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{X} \cup h \\ Q \neq P}} \overrightarrow{PQ}}$.

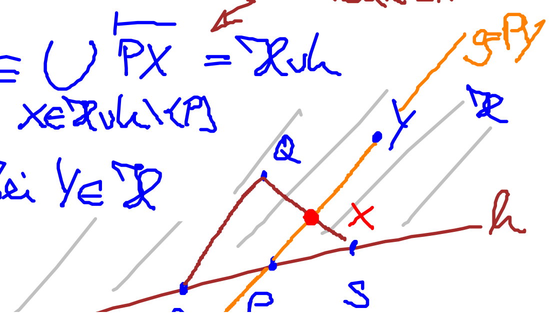
In Satz 2.8 wollen wir zeigen: $\quad \boxed{\mathcal{X} \cup h = \bigcup_{X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS}} \overrightarrow{PX}}$



Da $\overline{RQ} \cup \overline{QS} \subseteq \mathcal{X} \cup h$, gilt: (i) $\bigcup_{X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS}} \overrightarrow{PX} \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{X} \cup h \setminus \{P\}} \overrightarrow{PX} \overset{\text{Satz 2.7}}{=} \mathcal{X} \cup h$

(ii) Bleibt zu zeigen: $\mathcal{X} \cup h \subseteq \bigcup_{X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS}} \overrightarrow{PX}$!! $\quad$ Sei $Y \in \mathcal{X}$

Wir betrachten das Dreieck ΔRQS !!



Für die Grade $g = PY$ gilt, $\overline{RS} \cap g = \{P\}$.

Nach dem Satz von Pasch ex. $\{X\} = g \cap (\overline{RQ} \cup \overline{QS})$. Dann gilt:

$g \cap (\mathcal{H} \cup h) = \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PX}$, $X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS} \Rightarrow \overrightarrow{PY} \subseteq \bigcup_{X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS}} \overrightarrow{PX}$

Falls $Y \in h \setminus \{P\}$, dann: $\overrightarrow{PY} = \underline{\underline{\overrightarrow{PS}}}$ oder $\overrightarrow{PY} = \underline{\underline{\overrightarrow{PR}}}$.

$\Rightarrow \mathcal{H} \cup h = \bigcup_{Y \in \mathcal{H} \cup h} \overrightarrow{PY} \subseteq \bigcup_{X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS}} \overrightarrow{PX}$

gehören auch zu $\bigcup_{X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS}} \overrightarrow{PX}$

(i) + (ii) liefert Gleichheit der Mengen!

Beweis zu Satz 2.10 (Skript)

Ist $W = \sphericalangle QPR$ ein echtes Winkelfeld mit Scheitelpunkt P, so folgt:

$$\boxed{W = \bigcup_{X \in \overline{QR}} \overrightarrow{PX}}$$

Wir führen einen Alternativbeweis zum Skript!

Wir verwenden Satz 2.8, wobei $W = (\mathcal{H}_h \cup h) \cap (\mathcal{H}_g \cup g)$.

Donnerstag mehr!

ENDE für heute!