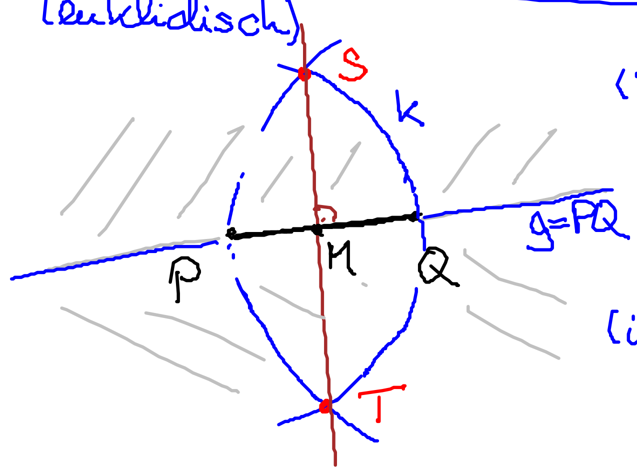
Vorlesung vom 13.06.2013:

- Zu elementargeometrischen Konstruktionen
- Die Längenmessung im hyperbolischen Geometriemodell
- Kap. 4 Beginn

1) Zu elementargeom. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal:

A) Konstruktion einer Mittelsenkrechten zu einer Strecke $\overline{PQ}$, (euklidisch)



(i) Schlage um P und Q zwei Kreisbögen, die sich in 2 Punkten schneiden. (Wähle z.B. $r = d(P,Q)$!!)

(ii) Schnittpunkte $S,T \in k_P \cap k_Q$ verbinden, Ergebnis: Mittelsenkrechte $m = ST$ zu $\overline{PQ}$.

(iii) $M \in ST \cap \overline{PQ}$ ist Mittelpunkt von $\overline{PQ}$.

Begründung: Zirkel dient dem Abtragen von Abständen. Nach Konstruktion gilt also für S,T:

$$d(S,P) = d(S,Q) \;;\; d(T,P) = d(T,Q)$$

Nach Aufgabe 29 (7. Blatt) bzw. Aufgabe 3.8/3.9 (Skript) gilt für die Mittelsenkrechte zu $\overline{PQ}$:

$$\forall X \in \mathcal{E}: \boxed{X \in m \Leftrightarrow d(X,P) = d(X,Q)}$$

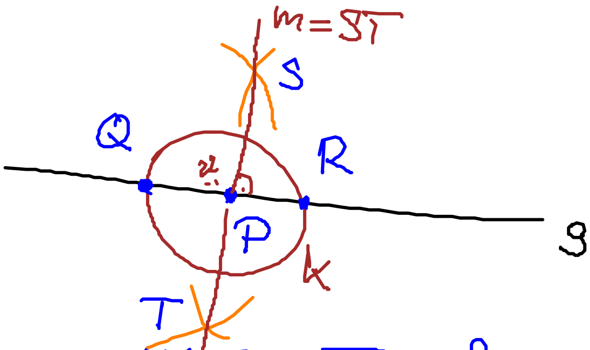
Also gilt:

$S,T \in m$ und $S \neq T$, und sie liegen in versch. Halbebenen zu $g = PQ$. Nach Ax (II') muss also gelten:

$m = ST$ und $\{M\} = ST \cap PQ$ existiert nach

HE-Axiom ($\overline{VI}$). M ist dann der Mittelpunkt, da $M \in \overline{PQ}$ und $d(P,M) = d(M,Q)$ wegen $M \in m$

B) Konstruktion der Senkrechten h in einem Punkt $P \in g$ zu g:
$= \text{Lot}$



(i) Kreisbogen k um P, ergibt 2 Schnittpunkte $Q, R \in g$ mit $d(Q,P) = d(P,R)$

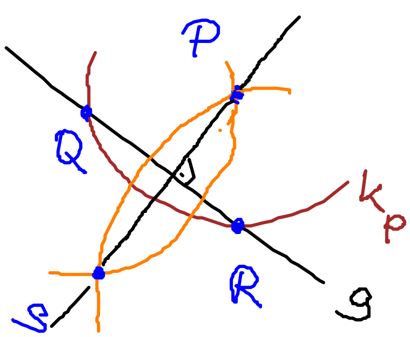
Existenz von Q, R gesichert durch Ax ($\overline{V}$) (Streckenmaßaxiom) für $r > 0$ zu k!

(ii) Zu $\overline{QR}$ verfahre gemäß (A).

Ergebnis: Mittelsenkrechte m zu $\overline{QR}$

Beachte: Da nach Konstruktion $d(P,Q) = d(P,R) = r$, folgt: $P \in m$. Also ist $m \perp g$ das gesuchte Lot $h = m$.

C) Konstruktion Lot $h \perp g$ durch einen Punkt $P \notin g$:



(i) Kreisbogen k_P um P mit „genügend" großem Radius $r > 0$.

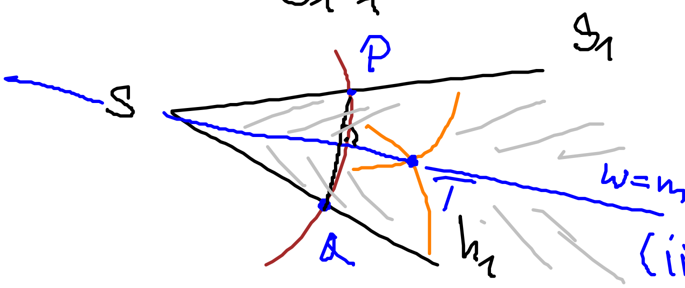
(ii) Dann ex. 2 Schnittpunkte $Q, R \in g$ mit $d(Q,P) = d(P,R) \Rightarrow P \in m$ mit m Mittelsenkrechte zu $\overline{QR}$.

(iii) Konstruiere z. B. mit demselben Radius r von k_p einen weiteren Punkt S mit $d(S,Q) = d(S,R)$ in der anderen HE zu g als der HE, wo P liegt.

Ergebnis: $m = PS$ ist Mittelsenkrechte zu $\overline{QR} \Rightarrow P \in m$, $m \perp g$

Also $h = m$ ist gesuchtes Lot.

D) Konstruktion der Winkelhalbierenden w zu einem Winkelfeld $\omega = \sphericalangle g_1 h_1$:



(i) Kreis k_S um S mit Radius $r>0$ ergibt 2 Punkte $P \in g_1$, $Q \in h_1$ mit $d(S,P) = d(S,Q) = r$

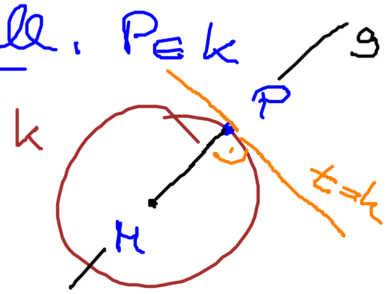
(ii) Um P und Q 2 Kreisbögen (z.B. mit Radius $r>0$, die sich in $T \in k_P \cap k_Q$ schneiden. Dann $d(T,P) = d(T,Q)$

(iii) $w = ST$ ist die gesuchte Winkelhalbierende. Warum?

Zunächst ist $ST = m$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{PQ}$ und damit die Symmetrieachse zu $\overline{PQ}$, d.h. $\gamma_m P = Q$, $\gamma_m Q = P$ sowie $\gamma_m \overline{PQ} = \overline{QP} = \overline{PQ}$ sowie (Halbgeradentreue) $\gamma_m \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SQ}$ und $\gamma_m \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP}$ wegen $\gamma_m S = S$. Weiter ist $\gamma_m \omega = \omega$, also Symmetrieachse von ω $\Rightarrow$ Winkelhalbierende!! $w = m$!!

E) Konstruktion der Tangente durch einen Punkt P an einen Kreis:

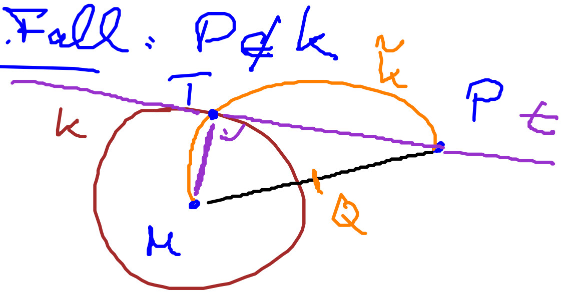
1. Fall: $P \in k$



Konstruiere Lot h zu $g = MP$ in P

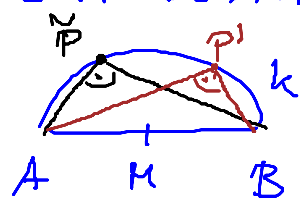
Ergebnis: $t = h$!

2. Fall: $P \notin k$



Wir benötigen den Satz des Thales:
Jeder Peripheriepunkt auf einem Halbkreis über einem Durchmesser $\overline{AB}$ bildet mit den Endpunkten A, B ein Rechtwinkelfeld!!

$\forall \tilde{P} \in k: w(\sphericalangle A\tilde{P}B) = 90$



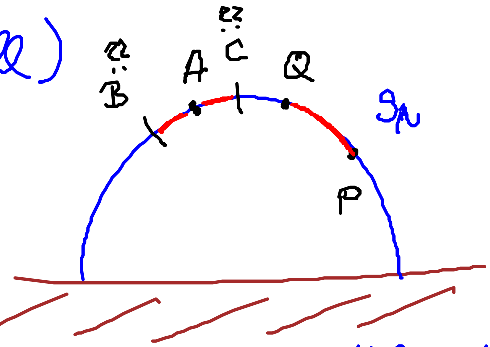
(i) Zeichne über der Strecke $\overline{MP}$ (=Durchmesser) einen Halbkreisbogen $\tilde{k}_Q$ um den Mittelpunkt Q zu $\overline{MP}$. (siehe (A))

(ii) $\{T\} = \tilde{k} \cap k$ ist gesuchter Tangentenberührpunkt, da $PT \perp MT$ nach Satz von Thales wegen $\omega(\sphericalangle MTP) = 90 \Rightarrow t = PT \perp MT$

Wir verwenden hier, dass Kreistangenten senkrecht auf Kreisdurchmessern stehen!

F) Euklidische Konstruktion der nicht-euklidischen Geradenspiegelung (Poincaré-Modell)

Zu Aufgabe 34 (b):



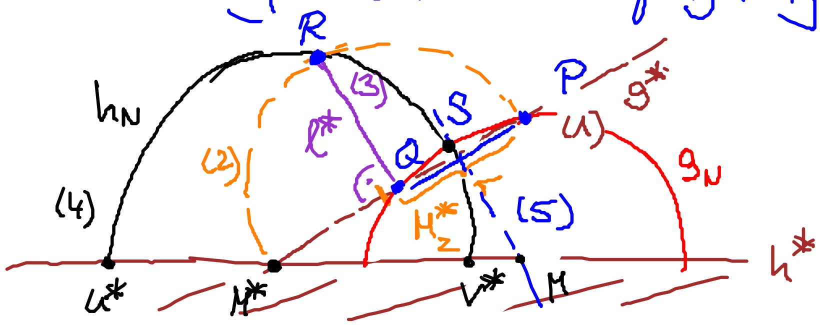
Idee zur Konstruktion von B, C:

(i) Konstruiere den Mittelpunkt $M_1 \in g_N$ zu $\overline{AQ}$ durch Konstruktion der Mittelsenkrechten m_N zu $\overline{AQ}$. Dann erhält $B \in g_N$ durch nichteuklidische Spiegelung γ_{m_N}: $B = \gamma_{m_N} P$!!

Das ist Aufgabe 34(a)!!

Lösung der Ü-Aufgabe 34(a):

Wir benötigen dazu die Kreisspiegelung!!



Gegeben: $P, Q \in \mathcal{E}_N$.

Konstruktion der nichteuklidischen Geraden $g_N = PQ_N$ nicht unbedingt nötig.

(1) Verbinde euklidisch P und Q und bilde Schnittpunkt M^* auf der Randgeraden h^* zur Poincaré-Halbebene E_N

(2) Bilde Thaleskreis k^* über der euklidischen Strecke $\overline{M^*P}$ mit euklidischem Mittelpunkt M_2^* auf $\overline{M^*P}$ und Radius $r = \frac{1}{2} d(M^*, P)$.

(3) Bilde euklidische Senkrechte l^* auf $M^*P = g^*$ mit $\boxed{Q \in l^*,\ l^* \perp g^*}$

Schnittpunkt $\boxed{\{R\} = l^* \cap k^*}$

(4) h_N ist dann der euklidische Halbkreis um M^* mit Radius $r = d(M^*, R)$

Nach Konstruktion ist $\gamma_{h_N} P = Q$, $\gamma_{h_N} R = R$, $\gamma_{h_N} PQ_N = QP_N = PQ_N$.

(5) Konstruiere nun die Verbindungsgerade $g_N = PQ$ in E_N mittels der euklidischen Mittelsenkrechte zur euklidischen Strecke $\overline{PQ}$ wie gehabt.
Der Schnittpunkt $\boxed{\{S\} = g_N \cap h_N}$ ist dann der gesuchte Mittelpunkt der nichteuklidischen Strecke $\overline{PQ}_N$.

Beachte in (1): M^* ist der euklidische Mittelpunkt der nichteuklidischen „Geraden" $h_N \perp g_N = PQ_N$ mit $\gamma_{h_N} \overline{PQ}_N = \overline{PQ}_N$.

ENDE der Vorlesung!!