Vorlesung vom 11.06.2013.

Zu den Punktspiegelungen:

Sei $Z \in \mathcal{E}$ ein fest gewählter Punkt. Dann heißt die Streckung $\sigma_Z: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit Zentrum $Z \in \mathcal{E}$ und Streckfaktor $k=-1$ Punktspiegelung an Z.

Bemerkung: Die Punktspiegelungen σ_Z sind neben der Identität (= Streckung mit Streckfaktor $k=1$) die einzigen Kongruenzabbildungen unter den Streckungen!

Satz 3.6: Ist $\sigma_Z: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ die Punktspiegelung an Z und sind $g, h \in \mathcal{G}$ mit $g \perp h$, $g \cap h = \{Z\}$, so gilt: $\boxed{\sigma_Z = \gamma_h \gamma_g}$ „γ_h nach γ_g"

Es gilt auch $\gamma_g \gamma_h = \sigma_Z$, denn:

$\sigma_Z \sigma_Z = id \Rightarrow \quad \sigma_Z = \sigma_Z^{-1} = (\gamma_h \gamma_g)^{-1} \underset{(*)}{=} \gamma_g^{-1} \gamma_h^{-1} = \gamma_g \gamma_h$ $\quad \boxed{\gamma_g \gamma_g = id}$

Zu $(*)$: Allgemein gilt für Abbildungen (bzw. auch Matrizen):

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}, \quad \text{denn} \quad (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{=id} \circ g = g^{-1} \circ g = id \checkmark$$

Mehr noch: Sind $k, l \in \mathcal{G}$ mit $k \perp l$, $k \cap l = \{Z\}$, so gilt auch $\boxed{\gamma_k \gamma_l = \sigma_Z = \gamma_h \gamma_g}$

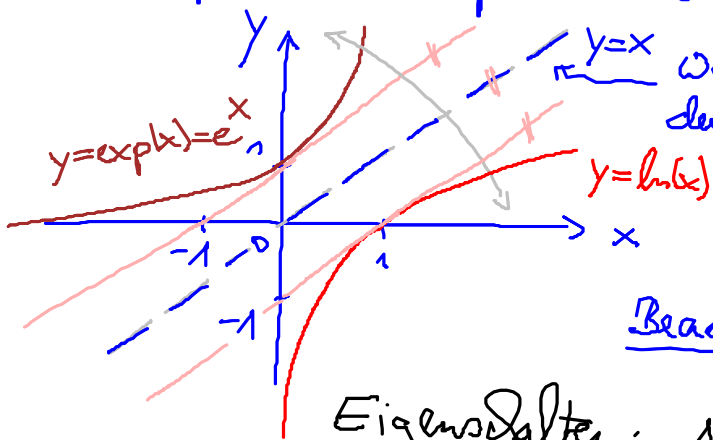
$(\gamma_h \circ \ldots) \Longrightarrow \quad \gamma_h \gamma_k \gamma_l = \gamma_h \gamma_h \gamma_g = \underbrace{(\gamma_h \gamma_h)}_{=id} \gamma_g = \gamma_g$ Spezialfall des 3-Spiegelungssatz

D.h.: Hier lässt sich die Verkettung von 3 Achsenspiegelungen bezüglich der Geraden $h, k, l \in \mathcal{G}$ mit $h \cap k \cap l = \{Z\}$ ausdrücken durch eine einzige

Achsenspiegelung $\gamma_g \in \mathcal{B}$ mit $z \in g$.

Zum „ln" als Funktion und Grundlage zur Messung des nicht-euklidischen Abstands $d_N(P,Q)$ für $P,Q \in E_N$.

$\ln = \exp^{-1}$ mit $\exp: \mathbb{R} \to]0,+\infty[= \mathbb{R}^+$, $\exp(x) = e^x$



Winkelhalbierende des durch die beiden „positiven" Halbgeraden x-Achse, y-Achse gebildeten Rechtwinkelfeldes

Beachte: $\boxed{y=\ln(x)} \Leftrightarrow \boxed{x=\exp(y)=e^y}$ (*)

Eigenschaften:

1) $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[$

2) $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

3) $\boxed{\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)}$??

Sei $y_1 = \ln(x_1)$, $y_2 = \ln(x_2)$ $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $e^{y_1} = x_1$, $e^{y_2} = x_2$

$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = e^{y_1} \cdot e^{y_2} = e^{y_1+y_2} \overset{(*)}{\Longrightarrow} y_1 + y_2 = \ln(x_1 \cdot x_2)$

$\Rightarrow \ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1 \cdot x_2)$ ■

Logarithmen als „Rechenzahlen" zur Vereinfachung von Rechenoperationen.

„Originalbereich":
x
y
$\Downarrow$
$x \cdot y = e^w$
$\sqrt{x} = \frac{1}{2} e^u$

„Transformation":
$\xrightarrow{\ln,\ \log_{10}}$
$\xleftarrow{\exp,\ 10^{\dots}}$

„Bildbereich":
$u = \ln x$
$v = \ln y$
$\Downarrow$
$w = u + v$

Logarithmentafeln / Rechenschieber

4) $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$, denn:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \ln(x_2) \overset{(3)}{=} \ln\left(\frac{x_1}{\cancel{x_2}} \cdot \cancel{x_2}\right) = \ln(x_1) \quad \Big| -\ln(x_2)$$

5) $\ln(x^a) = a\cdot\ln(x)$, z.B. $a=\frac{1}{2}$: $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\cdot\ln(x)$

Für $a=n\in\mathbb{N}$: $\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{-mal}}) \overset{(3)}{=} \underbrace{\ln(x)+\ldots+\ln(x)}_{n\text{-mal}} = n\cdot\ln(x)$

Für $a=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$: $n\cdot\underbrace{\ln(x^{1/n})}_{=??} = \ln((x^{1/n})^n) = \ln(x^{\frac{1}{n}\cdot n})$
$= \ln(x^1) = \ln(x)$ $\quad |:n$

$$\overset{:n}{\Longrightarrow} \ln(x^{1/n}) = \frac{1}{n}\ln(x)$$

Für $a=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^+$: $\ln(x^a) = \ln((x^{1/n})^m) = m\cdot\ln(x^{1/n})$
$= \frac{m}{n}\ln(x) = a\cdot\ln(x)$

Für $a\in\mathbb{Q}$, $a<0$: $-a>0$ und

$$\ln(x^a) = \ln\left(\frac{1}{x^{-a}}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(x^{\overset{>0}{-a}})$$
$$= -\ln(x^{-a}) = -\underbrace{(-a)}_{>0}\cdot\ln(x) = +a\cdot\ln(x)$$

Für $a\in\mathbb{R}$ beliebig argumentiert man mithilfe der „Stetigkeit" der ln-Funktion und $a=\lim_{n\to\infty} a_n$ für eine rationale Folge (a_n) mit $a_n\in\mathbb{Q}$.

Zurück zur Abstandsmessung in E_N:

$$d_N(P,Q) = \left|\ln\left(\frac{p_1}{p_2} : \frac{q_1}{q_2}\right)\right| = |\ln(u)-\ln(v)| \text{ für } u=\frac{p_1}{p_2},\ v=\frac{q_1}{q_2}$$

$$= 2\left|\ln\left(\underbrace{\frac{d(P,U^*)}{d(P,V^*)} : \frac{d(Q,U^*)}{d(Q,V^*)}}\right)\right|$$ ← siehe Aufgabe 32!! mit euklidischen Abständen $d(.,.)$

$$= \frac{d(P,U^*)}{d(P,V^*)}\cdot\frac{d(Q,V^*)}{d(Q,U^*)} \xrightarrow[\text{„}U^*\to\infty\text{"}]{} \frac{d(Q,V^*)}{d(P,V^*)}$$

Zur nichteuklidischen Abstandsmessung auf Geraden $g_N \in \mathcal{G}_{CN}$, welche euklidische Halbgeraden sind:

Punktabstände werden „hörbar" als Tonintervalle, wenn man als „Modell" für die nichteuklidische Halbgerade $\overline{PV}^*$ eine eingespannte Saite nimmt! Mehr dazu Donnerstag!!

ENDE der Vorlesung!