Vorlesung vom 11.04.2013:

Zur logischen Äquivalenz:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Also gilt: $\boxed{p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)}$

logisch (tautologisch) äquivalent

Zu $\boxed{p \to q}$ heißt die Implikation $\boxed{q \to p}$ die Umkehrung zu $p \to q$, $\boxed{\neg q \to \neg p}$ die Kontraposition und $\boxed{\neg p \to \neg q}$ das Inverse zu $p \to q$

= Kontraposition der Umkehrung

Achtung: $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p \not\Leftrightarrow q \to p$

Beispiel:

p: „n ist eine ungerade Zahl."

q: „n^2 ist eine ungerade Zahl."

1) $p \to q$: „Wenn n ungerade ist, dann ist n^2 ungerade."

Umkehrung 2) $q \to p$: „Wenn n^2 ungerade ist, dann ist n ungerade." } gerade ≙ nicht ungerade

3) $\neg p \to \neg q$: „Wenn n gerade ist, dann ist n^2 gerade."

Umkehrung 4) $\neg q \to \neg p$: „Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade."

Beweis 1): Idee: n ungerade heißt: $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt:

$$n^2 = (2k+1)^2 \underset{\text{Binom}}{=} 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{= m \in \mathbb{N}_0}) + 1$$

$$= 2m + 1 \quad \text{mit } m = 2k(k+1) \in \mathbb{N}_0$$

$\Longrightarrow n^2$ ist ungerade ■

Beweis 2): Ist „direkt" nur schwer zu beweisen. Betrachte daher die logische Kontraposition zu 2) (manchmal auch als Verfahren „indirekter Beweis" genannt):

$$(2) \Longleftrightarrow \boxed{q \to p \overset{\text{Kontraposition}}{\Longleftrightarrow} \neg p \to \neg q} \Longleftrightarrow (3)$$

Also: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$ gerade. Dann: $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{= m \in \mathbb{N}}$

$$= 2m, \quad \text{mit } m = 2k^2 \in \mathbb{N}_0$$

$\Longrightarrow n^2$ ist gerade ■

Zur Geometrie der Ebene:

Grundmenge: $\mathcal{E} \neq \emptyset$ — $\mathcal{E}$ ist eine nicht leere Menge

Punkte: $P, Q, R \in \mathcal{E}$ — Elemente in $\mathcal{E}$

Geraden: $g, h, k \in \mathcal{G}$ Teilmengen in $\mathcal{E}$

„Geradenmenge"

$\mathcal{G}$: Menge von Teilmengen, also:

$\mathcal{G} = \{g, h, k, \ldots\} \subseteq \underline{\underline{\mathcal{P}}}(\mathcal{E})$

Potenzmenge von $\mathcal{E}$

Also:

2. Etage	$\{g, h, k\}$	Mengensysteme	$\{g, h, k\} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$
1. Etage	$g = \{P, Q, R\}, \ldots$	Geraden	$g \subseteq \mathcal{E}$
0. Etage	P, Q, R	Punkte	$P \in \mathcal{E}$

Potenzmenge: $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \subset \mathcal{E}\}$

Menge (= System) aller Teilmengen von $\mathcal{E}$.

Bestimmte Inzidenz (= Lage) beziehungen zwischen Punkten und Geraden werden als Grundlage der Geometrie genommen und in Axiomen festgelegt

Axiomatik regelt, wie die Geometrie „aussieht" !!

konkrete Realisierung einer Geometrie = Modell !!

Grundlegende 3 Anforderungen an ein Axiomensystem:

1) Widerspruchsfreiheit, d.h. es darf nicht aus den Axiomen zugleich eine Aussage p und die Negation $\neg p$ herleitbar sein!! Denn, dann hätten wir

$$\underbrace{\boxed{a_1 \wedge \ldots \wedge a_n}}_{\text{Axiome } a_1 \text{ bis } a_n} \Rightarrow p \wedge \neg p \Rightarrow \boxed{0}$$

$\lightning$

2) Vollständigkeit, d.h.: alle „gültigen Sätze" in dem betrachteten System sollten aus den Axiomen herleitbar sein.

Klassisches Beispiel: Das Parallelenaxiom von Euklid; 2000 Jahre lang Versuch, dieses Axiom als Satz aus den anderen Axiomen zu beweisen!! Versuch gescheitert !! Aber so kam es zur „Entdeckung" eines widerspruchsfreien nicht-euklidischen Geometrie ohne Parallelenaxiom!

Nicht unbedingt zwingend! Wäre aber im Sinne von „Minimalität" optimal!

3) Unabhängigkeit, d.h.: keines der genannten Axiome ist aus den anderen beweisbar!

ENDE der Vorlesung!