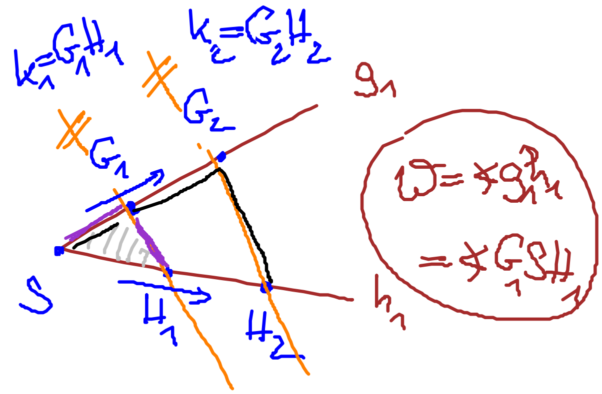
Letzte EleGeo-Vorlesung vom 09.07.2013.

- 2 Strahlensätze plus Umkehrung?
- Winkelsumme im Dreieck
- Satz von Menelaos und Ceva + Umkehrung

1) 2. Strahlensatz:

Konfiguration wie im 1. Str.Sa. Dann gilt:



$$G_1H_1 \parallel G_2H_2 \Rightarrow \frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)} = \frac{d(G_2,H_2)}{d(G_1,H_1)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{d(G_1,H_1)}{d(S,G_1)} = \frac{d(G_2,H_2)}{d(S,G_2)}}$$

Beweis: Streckung σ_S mit Streckfaktor $\boxed{k = \frac{d(G_2,S)}{d(G_1,S)}}$ $\Rightarrow \sigma_S G_1 = G_2$

Wir wissen dann:

$\sigma_S H_1 \in \overline{SH_1} = h_1$ mit $d(S, \sigma_S H_1) = k \cdot d(S,H_1)$ und nach Satz 4.10: $\sigma_S G_1H_1 = \sigma_S k_1 \parallel k_1$ mit $G_2 = \sigma_S G_1 \in \sigma_S k_1$.

Satz 4.12 $\Longrightarrow$ =(PA) $\quad \sigma_3 k_1 = k_2$, da $k_2 = G_2H_2 \parallel k_1$ mit $G_2 \in k_2$ // Eindeutigkeit der Parallele durch G_2!!

Da σ_3 als Ähnlichkeitsabb. [Axiom $\boxed{IX}$] streckentreu ist, folgt: $\sigma_3 \overline{G_1H_1} = \overline{\sigma_3 G_1\, \sigma_3 H_1} = \overline{G_2\, \sigma_3 H_1}$ mit $\{\sigma_3 H_1\} = h_1 \cap G_2H_2 = \{H_2\}$

$$\Longrightarrow \sigma_3 H_1 = H_2 \Longrightarrow d(S,H_2) = d(S,\sigma_3 H_1) = k \cdot d(S,H_1)$$

Außerdem:

$$\boxed{\sigma_3 \overline{G_1H_1} = \overline{G_2H_2}} \Longrightarrow d(G_2,H_2) = k \cdot d(G_1,H_1) \quad !!$$

Längenverhältnistreue von σ_3!

$$\Longrightarrow \frac{d(G_2,H_2)}{d(G_1,H_1)} = k = \frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)} \quad \blacksquare$$

Frage: Gilt die Umkehrung des 2. Str.Sa'es?

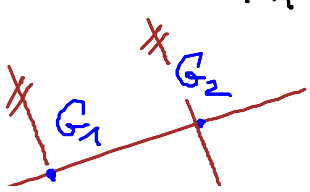
Antwort: Nein!!

Logisch lautet die Umkehrung:

$$\frac{d(G_1,H_1)}{d(G_2,H_2)} = \frac{d(S,G_1)}{d(S,G_2)} \not\Longrightarrow k_1 = G_1H_1 \parallel G_2H_2 = k_2$$

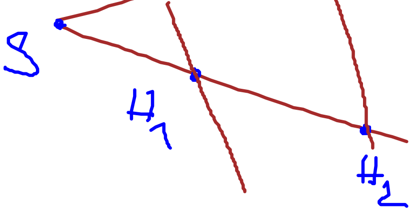
Man betrachte die Skizze im Skript dazu! Beachte, dass der konstruierte Punkt $H_1' = S_e H_1$ mit G_1 keine Parallele mehr zu $k_2 = G_2H_2$ bildet, also: $G_1H_1' \nparallel G_2H_2$, obwohl

$$\frac{d(G_1,H_1')}{d(G_2,H_2)} = \frac{d(S,G_1)}{d(S,G_2)} \quad !!$$



Beide Str.Sä'e zusammen:

1. Str.Sa.



$k_1 = G_1H_1 \parallel G_2H_2 = k_2 \Rightarrow \boxed{\frac{d(S,G_1)}{d(S,G_2)} = \frac{d(S,H_1)}{d(S,H_2)} = \frac{d(G_1,H_1)}{d(G_2,H_2)}}$

2.Str.Sa.

Es gilt dann auch z.B.:

$$\frac{d(S,G_1)}{d(G_1,G_2)} = \frac{d(S,H_1)}{d(H_1,H_2)}$$

siehe Additivität des Streckenmaßes $d(.,.)$!!

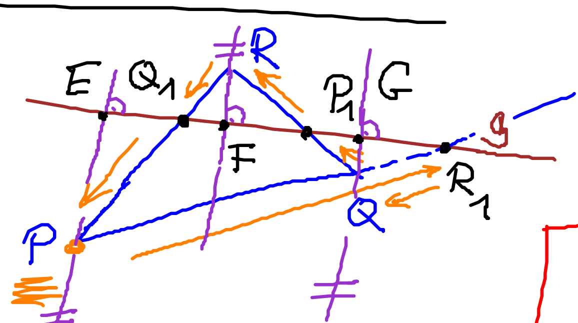
z.B. verwende man:

$d(G_1,G_2) = d(S,G_2) - d(S,G_1)$ bzw.

$d(H_1,H_2) = d(S,H_2) - d(S,H_1)$

2) Sätze von Menelaos und Ceva:

Skizze:



Behauptung: Ist g geg mit $g \cap PR = \{Q_1\}$, $g \cap PQ = \{R_1\}$ und $g \cap RQ = \{P_1\}$, dann gilt:

$$\boxed{\frac{d(P,R_1)}{d(R_1,Q)} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} \cdot \frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} = 1}$$

Beweis: Fälle von P, Q und R aus die Lote auf g mit Fußpunkten E, F, G (s. Skizze!)

Aufgrund der doppelten Loteigenschaft sind die 3 Geraden $k_1 = PE$, $k_2 = RF$ und $k_3 = QG$ zueinander parallel.

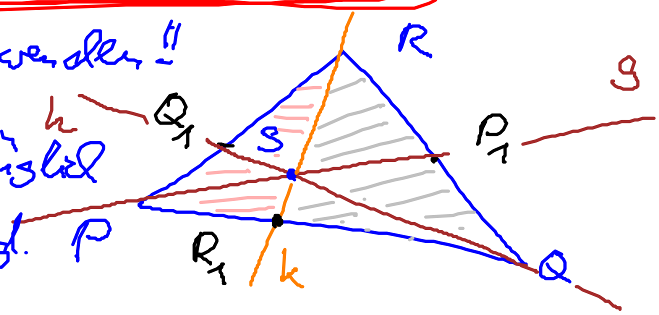
Damit können wir den 2.Str.Sa anwenden!!

Ceva: $\triangle PQR$ und 3 Geraden $g = PP_1$, $h = QQ_1$, $k = RR_1$ mit $P_1 \in \overline{QR}$, $Q_1 \in \overline{PR}$ und $R_1 \in \overline{PQ}$ mit $h \cap k \cap g = \{S\}$ (Schnittpunkt im Inneren)

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d(P,R_1)}{d(R_1,Q)} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} \cdot \frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} = 1}$$

Beweis: 2-mal Menelaos anwenden!!

z.B. Gerade $h = QQ_1$ bezüglich $\triangle PRR_1$ und $g = PP_1$ bezügl. $\triangle QRR_1$!!



$$(1)\quad \frac{\cancel{d(P,Q)}}{d(Q,R_1)} \cdot \frac{\cancel{d(R_1,S)}}{d(S,R)} \cdot \frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} = 1 \qquad (2)\quad \frac{d(R_1,P)}{\cancel{d(P,Q)}} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} \cdot \frac{d(R,S)}{\cancel{d(S,R_1)}} = 1$$

$$(1)\cdot(2)\quad \frac{\cancel{d(P,Q)}}{d(Q,R_1)} \cdot \frac{\cancel{d(R_1,S)}}{\cancel{d(S,R)}} \cdot \frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} \cdot \frac{d(R_1,P)}{\cancel{d(P,Q)}} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} \cdot \frac{\cancel{d(R,S)}}{\cancel{d(S,R_1)}} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} \cdot \frac{d(P,R_1)}{d(R_1,Q)} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} = 1 \quad \blacksquare$$

ENDE der Vorlesung!