Vorlesung vom 07.05.13:

- Das HE-Axiom und der Satz von Pasch
- Winkelfelder

1) Das HE-Axiom:

Vorweg:

Verallgemeinerter Satz gegenüber Skript!!

Satz 2.2*): Seien $(K_i)_{i\in I}$ ein System konvexer Mengen $K_i \subseteq \mathcal{E}$ $(i\in I)$ in einer Geometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$. Dann gilt:

$$\boxed{K := \bigcap_{i\in I} K_i = \{P\in\mathcal{E} \mid \forall i\in I : P\in K_i\}}$$

Prädikatenlogik!!

ist eine konvexe Menge in $\mathcal{E}$.

Beweis: Seien $P, Q \in K$ beliebig. z.z.: $\overline{PQ} \subseteq K$. ($\subseteq PQ$ (Verbindungsgerade))

Nun gilt: $P, Q \in K_i$ für jedes $i\in I$

$\Longrightarrow$ (K_i konvex) $\overline{PQ} \subseteq K_i$ — " — $\Longrightarrow \overline{PQ} \subseteq \bigcap_{i\in I} K_i$

Denn für jedes $R\in\overline{PQ}$ gilt:
$R\in K_i$ für alle $i\in I \Rightarrow R\in\bigcap_{i\in I} K_i$

Beweis zu Satz 2.3 (Skript):

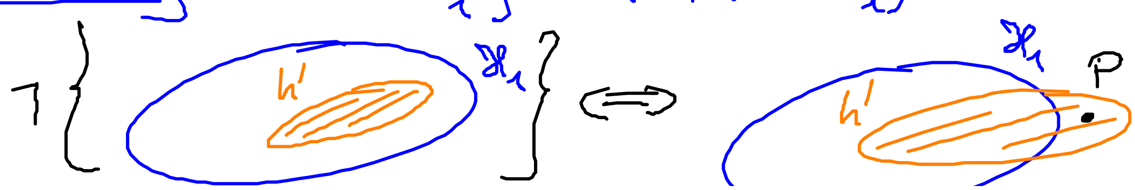
z.z.: $h, h' \in \mathcal{G}$, $h \parallel h'$ mit $h \neq h'$ $\Rightarrow h' \subseteq \mathcal{H}_1 \vee h' \subseteq \mathcal{H}_2$ für $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathcal{E}\setminus h$

Halbebenen zu h

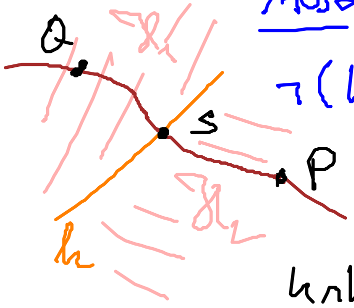
Beachte: $h\neq h' \wedge h\parallel h' \Longrightarrow h\cap h' = \emptyset$

Verneinung zu $h' \subseteq \mathcal{H}_1$, also: $\neg(h'\subseteq\mathcal{H}_1)$

Nicht Teilmenge



es ex. $P \in h'$ mit $P \notin \mathfrak{X}_1$



Also, angenommen es gilt

$$\neg(h' \subseteq \mathfrak{X}_1 \vee h' \subseteq \mathfrak{X}_2) \Leftrightarrow h' \not\subseteq \mathfrak{X}_1 \wedge h' \not\subseteq \mathfrak{X}_2$$

$$\Leftrightarrow \exists P,Q \in h' : P \in \mathcal{E}\setminus\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 \cup h \wedge Q \in \mathcal{E}\setminus\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1 \cup h$$

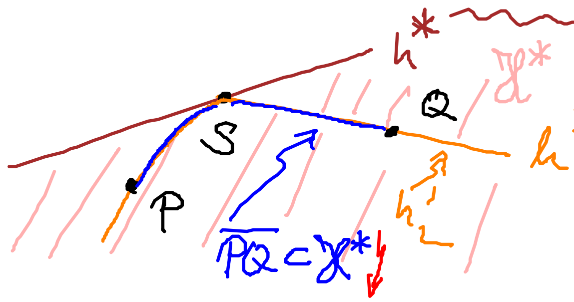
$$\overset{h\cap h' = \emptyset}{\Longrightarrow} P \in h' \cap \mathfrak{X}_2 \wedge Q \in h' \cap \mathfrak{X}_1 \underset{\text{HE-Ax }\boxed{\text{VI}}}{\Longrightarrow} \overline{PQ} \cap h = \{S\}$$

$$\underset{\overline{PQ} \subseteq PQ = h'}{\Longrightarrow} h' \cap h \neq \emptyset \quad \text{↯}$$

Also ist die Annahme falsch, und es gilt die Behauptung ■

Skizze zum Beweis von Satz 2.4:

1. Fall: $h' \cap h^* = \{S\}$ mit $h' \subseteq h^* \cup \mathfrak{X}^*$, $h^* \subseteq h' \cup \mathfrak{X}'$



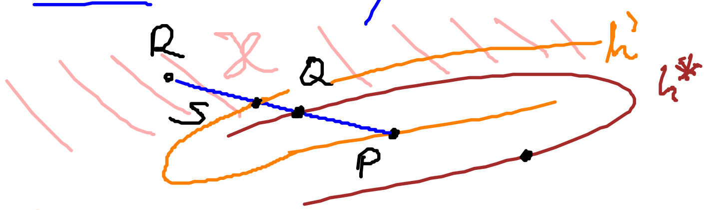
Sei $h' = h_1' \cup h_2'$ mit $h_1' \cap h_2' = \{S\}$ Halbgeraden zu h'

Wegen $h' \neq h^*$: $P, Q \notin h^*$, d.h.

$P, Q \in \mathfrak{X}^* \Rightarrow \overline{PQ} \subseteq \mathfrak{X}^*$ ↯ denn:

$S \in \overline{PQ} \cap h^* \Rightarrow S \notin \mathfrak{X}^*$!!

2. Fall: $h' \cap h^* = \emptyset$ mit $h' \subseteq \mathfrak{X}^*$, $h^* \subseteq \mathfrak{X}'$



$\mathfrak{X}$ gemeinsame HE zu h' und h^*.

Wähle $R \in \mathfrak{X}$, $P \in h' \subseteq \mathfrak{X}^*$ | $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*$ HE zu h^*

$$\underset{\substack{\text{HE-Ax }\boxed{\text{VI}} \\ \text{bezügl. } h^*}}{\Longrightarrow} \overline{RP} \cap h^* = \{Q\} \underset{h^* \subseteq \mathfrak{X}'}{\Longrightarrow} Q \in \mathfrak{X}'$$

Nun HE-Ax $\boxed{\text{VI}}$ bezügl. h': $R \in \mathfrak{X} \wedge Q \in \mathfrak{X}' \Rightarrow \overline{RQ} \cap h' = \{S\}$

Wegen der Lage zueinander gilt: $S \neq P$. Dann:

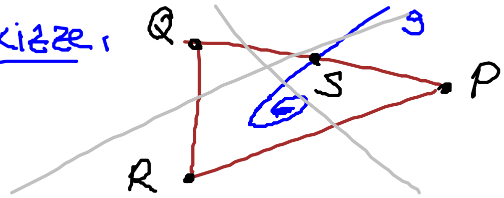
$$Q \in \overline{SP} \subseteq h' \wedge Q \in h^* \Rightarrow Q \in h' \cap h^* = \emptyset \quad \text{↯} \quad ■$$

Satz 2.5 („Axiom" von Pasch):

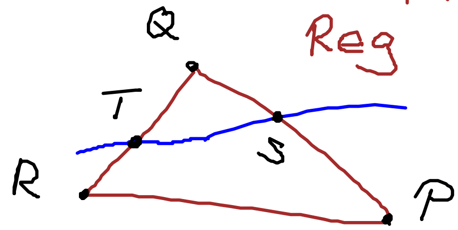
Seien $P, Q, R \in \mathcal{E}$ drei nicht kollineare Punkte, $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade mit $g \cap \overline{PQ} \setminus \{P,Q\} = \{S\}$. Dann folgt: $g \cap \overline{PR} \neq \emptyset \vee \boxed{g \cap \overline{QR} \neq \emptyset}$

beides kann eintreten, falls $R \in g$

Skizze:



Fall: Pasch gilt nicht!



Beweis:

Nach Ax (VI) gilt: $\mathcal{E} \setminus g = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ mit $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$ HEn zu g.

Wegen $\overline{PQ} \cap g = \{S\}$ müssen P und Q in verschiedenen HEn zu g liegen. O.B.d.A. sei $P \in \mathcal{H}_1$, $Q \in \mathcal{H}_2$.

Falls $R \in g$, dann gilt $R \in g \cap \overline{RQ} = g \cap \overline{PR}$.

Falls $R \notin g$, dann gilt: $R \in \mathcal{H}_1 \vee R \in \mathcal{H}_2$.

$R \in \mathcal{H}_1 \underset{(VI)}{\Longrightarrow} \overline{QR} \cap g = \{T\} \neq \emptyset$. Analog: $R \in \mathcal{H}_2 \underset{(VI)}{\Longrightarrow} \overline{PR} \cap g = \{T\} \neq \emptyset$ ■

Bemerkung: Es besteht eine Art „logische Äquivalenz" zwischen dem HE-Axiom (VI) und dem Satz von Pasch.

$\Longrightarrow$ ✓

$\Longleftarrow$??

Abschluss der heutigen VL durch die Bemerkung, dass Ax. (VI) von den Axiomen (I)–(V) rel. unabhängig ist.

ENDE für diese Woche!

Allen Teilnehmer/innen einen schönen Himmelfahrtstag!