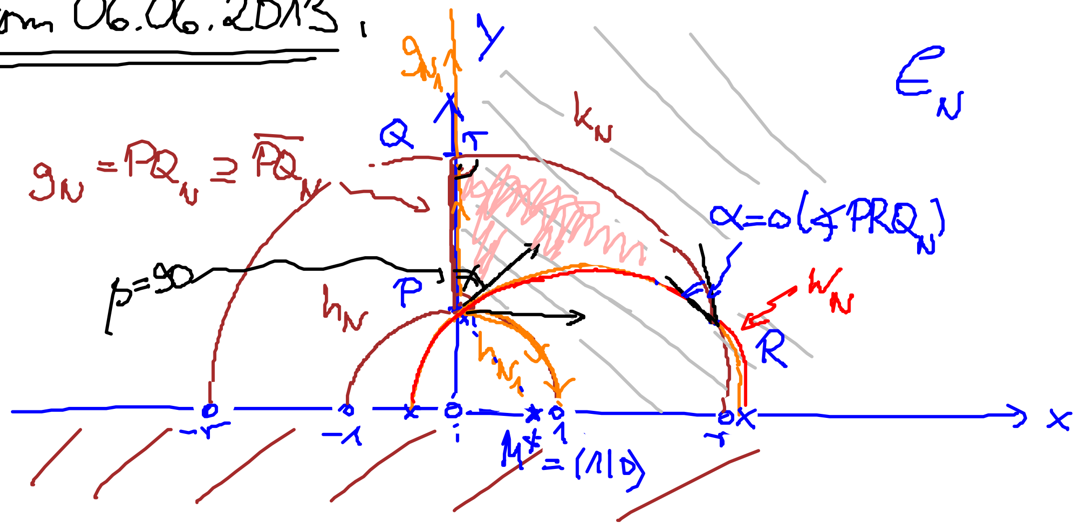
Vorlesung vom 06.06.2013.

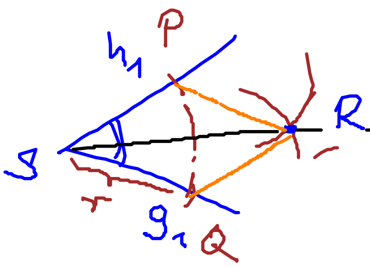
Zu Blatt 7.

(28)



$h_N: x^2+y^2=1$, $k_N: x^2+y^2=r^2$

Euklidische Winkelhalbierendenkonstruktion:

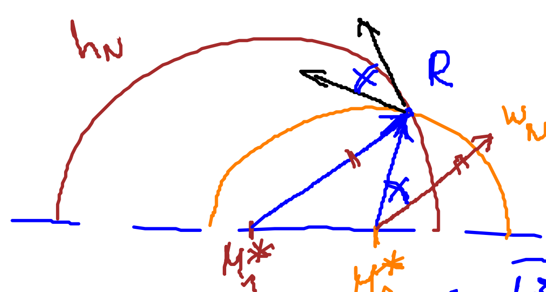


$w_1 = \overrightarrow{SR}$, Winkelhalbierende zu $\omega = ∢ PSQ$

Konstruiere Eckpunkte eines Rautenvierecks. Dann ist die Diagonale die Winkelhalbierende!

Bemerkung: Die euklidische Konstruktion des Mittelpunkts einer Strecke und dabei auch der Mittelsenkrechten sowie von Loten durch einen Punkt beruht auf der Aussage von Aufgabe 29!

Zur Winkelmaßbestimmung bzw. $\cos\alpha$ für das Winkelfeld $\omega_R = ∢ PRQ_N$:



Der auftretende Winkel α taucht als Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a} = \overrightarrow{M_1^* R}$ und $\overrightarrow{M_2^* R} = \underline{b}$ auf.

Beachte (Lin A I/II): $\cos\alpha = \underline{a} \cdot \underline{b}$ (Skalarprodukt) z.B.: $\|a\| = d(M_1^*, R) = r$, $\|b\| = d(M_2^*, R) = \sqrt{2}$

Setze die geometrische Formel für das Standardskalarprodukt voraus:

$$\boxed{a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\alpha} \iff \cos\alpha = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

Zurück zum Skript:

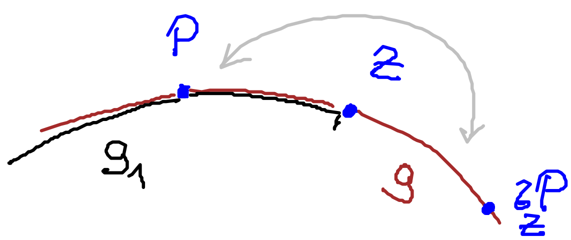
Spezialfälle von Streckungen: 1) $k = 1 \Rightarrow \sigma_Z = id$

2) $k = -1 \Rightarrow \sigma_Z$ heißt Punktspiegelung

Im Fall 2): $\boxed{d(\sigma P, Z) = \underbrace{|k|}_{=1} \cdot d(P, Z) = d(P, Z)}$

Aufgabe 3.14: Für eine Punktspiegelung σ_Z mit Zentrum Z und Streckfaktor $k = -1$ gilt $\boxed{\sigma_Z \sigma_Z = id} \iff \sigma_Z^{-1} = \sigma_Z$.

Beweis: Für $P \in \mathcal{E}$, $P \neq Z$ gilt, wenn $g = PZ = g_1 \cup g_2$ mit $g_1 = \overrightarrow{ZP}$, $g_2 = g \setminus (\overrightarrow{ZP} \setminus \{Z\})$



$\sigma_Z P \in g_2$, da $k = -1 < 0 \Rightarrow \sigma_Z \sigma_Z P \in g_1$

und $d(\sigma_Z \sigma_Z P, Z) = |k| \, d(\sigma_Z P, Z) = |k|^2 d(P, Z) = d(P, Z)$

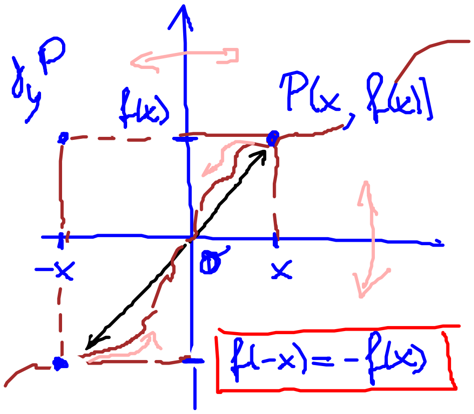
Also: $\sigma_Z \sigma_Z P, P \in g_1 = \overrightarrow{ZP}$ mit $d(\sigma_Z \sigma_Z P, Z) = d(P, Z)$

$$\xRightarrow{Ax\,V} \sigma_Z \sigma_Z P = P \qquad \blacksquare$$

Satz 3.6.: Punktspiegelung ist darstellbar als zweifache Achsenspiegelung der Form

$$\boxed{\sigma_Z = \gamma_g \gamma_h} \text{ mit } g \cap h = \{Z\}, \; g \perp h$$

Bemerkung: Dies findet z.B. Anwendung in der Analysis bei der Symmetriebetrachtung im Fall „ungerade Fkt."



$$f(-x) = -f(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) = -f(-x)$$

$\cdot(-1)$

Spiegelung an x-Achse

Spiegelung an y-Achse

$P'(-x, f(-x)) = \gamma_x \gamma_y P = \sigma_O P$

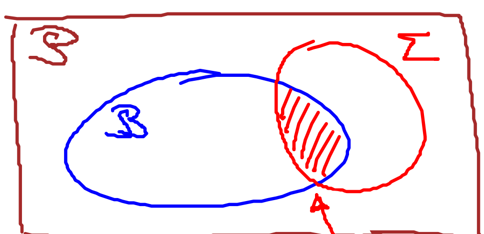
mit γ_x: Achsenspiegelung an der x-Achse

γ_y: ——"—— an der y-Achse

σ_O: Punktspiegelung am Ursprung $O(0|0)$.

<u>Fazit des Satzes</u>: $\sigma_Z = \gamma_g \gamma_h$ ist eine KA, da γ_g, γ_h als Achsenspiegelungen KAen sind. Aber Streckungen können wegen der geforderten Längenmaßtreue der KA <u>nur</u> im Fall $k = \pm 1$ auch KAen sein!!

<u>Heißt</u>: Eine Streckung σ_Z mit Zentrum Z ist genau dann eine Kongruenzabbildung, wenn $k=1$ (d.h. $\sigma_Z = id$) oder $k=-1$ (d.h. σ_Z Punktspiegelung)!!



$\mathcal{P}$: Permutationsgruppe

$\mathcal{B}$: Kongruenzabbildungsgruppe

Σ: Menge der Streckungen

$\Sigma \cap \mathcal{B} = \{\sigma_Z \mid \sigma_Z \text{ Punktspiegelung}\} \cup \{id\}$

Noch ein <u>Fazit</u>: <u>Jedes</u> Paar Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ mit $g \cap h = \{Z\}$, $g \perp h$ führt auf dieselbe eindeutige Punktspiegelung σ_Z mit Streckfaktor $k=-1$.

ENDE der Vorlesung!