Vorlesung vom 04.07.2013:

- Folgerungen aus dem Streckungsaxiom (IX) $\Rightarrow$ Der Schritt in die Euklidische Geometrie
- Euklids Parallelenaussage (insbesondere die Eindeutigkeit)
- Strahlensätze und Umkehrungen
- Winkelsumme im Δ ??

1) Fortführung des Beweises von Satz 4.12:

Wir haben gezeigt: Falls $h' \in \mathcal{G}$ eine weitere Parallele zu g mit $P \in h'$ neben dem doppelten Lot h zu g durch P ist, so dass $Q \in h'$, $Q \notin h$ existiert, dann kann man eine Streckung ζ_P mit Zentrum P finden, so dass $\zeta_P Q = \boxed{Q' \in g \cap h'}$. Achtung, Widerspruch!

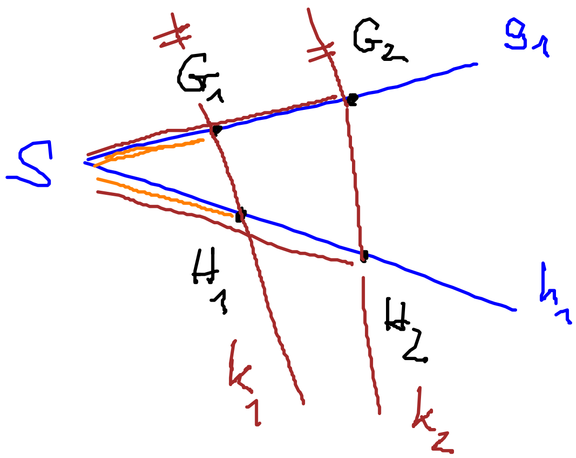
Abers es war doch gefordert:

$$P \in h',\ h' \| g \underset{P \notin g}{\Longrightarrow} h' \cap g = \emptyset$$

---

2) Die Strahlensätze:

1. StSa: Gegeben ein Winkelfeld $W = \sphericalangle g_1 h_1$ mit Scheitelpunkt S



Weiterhin: $k_1 \parallel k_2$ mit $k_i \in \mathcal{G}$ $(i=1,2)$

und $k_i \cap g_i = \{G_i\}$, $k_i \cap h_i = \{H_i\}$ $(i=1,2)$

Dann gilt:

$$\boxed{\frac{d(S,G_1)}{d(S,G_2)} = \frac{d(S,H_1)}{d(S,H_2)}} \quad (*)$$

"Längenmessungen auf g_1!!"

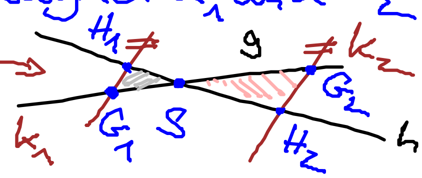
"Längenmessungen auf h_1!!"

$$(*) \Leftrightarrow \boxed{\frac{d(S,G_1)}{d(S,H_1)} = \frac{d(S,G_2)}{d(S,H_2)}}$$

Beweisidee (zentral): Konstruiere eine Streckung σ_S, welche k_1 in k_2 überführt!! Dafür benötigt man Satz 4.10 und 4.12 (Euklid)!!

Der gesuchte Streckfaktor k muss erfüllen: $|k| = \frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)}$.

Je nach Lage von S bezüglich k_1 und k_2 wählt man $k>0$ oder $\boxed{k<0}$.



Jetzt begründet man: $\sigma_S k_1 = k_2 \Rightarrow \sigma_S H_1 = H_2$, denn:

$$\{H_1\} = h \cap k_1 \Rightarrow \{\zeta_S H_1\} = \zeta_S h \cap \zeta_S k_1 = h \cap k_2 = \{H_2\}$$

Dann folgt zuletzt: $$\frac{d(S,H_2)}{d(S,H_1)} = \frac{d(S,\zeta_S H_1)}{d(S,H_1)} = k = \frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)}$$

Definition von k als Streckfaktor!

1. StSa in Kurzform: Voraussetzungen zu k_1, k_2, S, G_i, H_i $(i=1,2)$ wie im Satz formuliert.

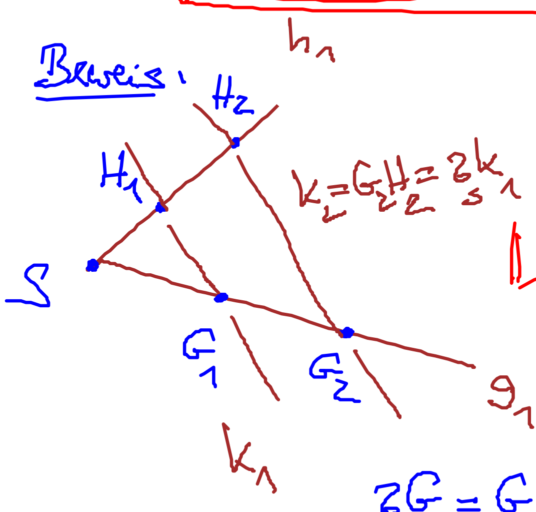
$$\boxed{k_1 \parallel k_2 \Longrightarrow \frac{d(S,G_1)}{d(S,H_1)} = \frac{d(S,G_2)}{d(S,H_2)}}$$

$$\Longleftarrow \; ??$$

Umkehrung des 1. StSa(es): Sei $\omega = \sphericalangle g_1 h_1$ mit Scheitelpunkt S und $G_1, G_2 \in g_1$, $H_1, H_2 \in h_1$ gegeben. Dann gilt:

$$\boxed{\frac{d(S,G_1)}{d(S,H_1)} = \frac{d(S,G_2)}{d(S,H_2)} \Longrightarrow k_1 \parallel k_2}$$

Beweis:



Wir betrachten den Streckfaktor $$k := \frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)} \overset{!\,\text{nach Vorauss.}}{=} \frac{d(S,H_2)}{d(S,H_1)}$$

Dann gilt für die Streckung ζ_S mit Zentrum S und Streckfaktor k:

$$\zeta G_1 = G_2 \quad \text{und} \quad \zeta H_1 \overset{!}{=} H_2$$

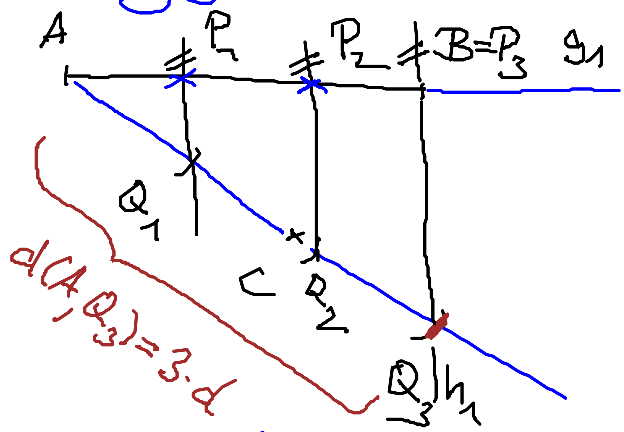
$$\Longrightarrow \zeta_S(G_1H_1) = \zeta_S k_1 = \zeta_S G_1 \, \zeta_S H_1 = G_2H_2 = k_2$$

$\Longrightarrow$ Satz 4.10 $\quad k_2 = \frac{2}{3} k_1 \parallel k_1$ ■

Eine konstruktive Anwendung des 1. Strahlensatzes:

Zerlegung einer gegebenen Strecke $\overline{AB}$ in n gleichlange Stücke

$n = 3$.



Idee: Wähle zu $g_1 = \overline{AB}$ einen beliebigen 2. Strahl $h_1 = \overline{AC}$ mit $C \notin g$.

Nehme eine beliebige Länge d in den Zirkel.

Dann trage d n-mal von A aus auf h_1 ab. Das ergibt Teilungspunkte $Q_1, \ldots, Q_n$ mit $d(A, Q_k) = k \cdot d$. $(k = 1, \ldots, n)$

Zu $k_n = Q_n B$ konstruiere die Parallelen k_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Für $\{P_i\} = k_i \cap g_1$ gilt $(P_n = B)$:

$$k_i \parallel k_n \Longrightarrow \boxed{\frac{d(A, P_i)}{d(A, B)} = \frac{d(A, Q_i)}{d(A, Q_n)} = \frac{i \cdot d}{n \cdot d} = \frac{i}{n}}$$

$i = m$

$$\Longrightarrow \boxed{d(A, P_m) = \frac{m}{n} \cdot d(A, B)}$$ ■

ENDE der Vorlesung!