$\gamma_g\gamma_g P$ und P haben auf $\overline{SP}$ denselben Abstand

zu $S \overset{Ax\ V}{\Longrightarrow} \gamma_g\gamma_g P = P$. ☑

<u>Wiederholung:</u> 04. Juni 2013

<u>Achsenspiegelung:</u>

$\gamma_g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist KA (Kongruenzabb.), d.h.

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } \gamma_g \text{ ist Permutation}\\ \text{(ii) } \gamma_g \text{ ist längentreu}\\ \text{(iii) } \gamma_g \text{ ist winkelmaßtreu}\end{array}\right\} \text{Maßtreue}^{(*)}$$

(i) γ_g ist Permutation

(iv) γ_g ist geradentreu

(*) setzt voraus: Streckenmaßtreue, Winkelfeldtreue (ist beweisbar!)

zusätzlich: (v) $g \in G$ ist Fixpunktgerade, d.h.:

$\forall P \in g : \gamma_g P = P$.

(vi) Die Halbebenen von g werden „vertauscht", d.h.

$$\mathcal{E} \setminus g = \mathcal{H}_1 \dot\cup \mathcal{H}_2 \Rightarrow \boxed{\gamma_g \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2,\ \gamma_g \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1}$$

Halbebenentreue

<u>Bemerkung:</u> (zu vi)

$\gamma_g \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$ folgt aus $\gamma_g \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, denn:

$$\gamma_g \mathcal{H}_2 = \gamma_g(\underbrace{\mathcal{E} \setminus (g \cup \mathcal{H}_1)}_{= \mathcal{H}_2}) \overset{\gamma_g \text{ bijektiv}}{=} \gamma_g \mathcal{E} \setminus (\gamma_g g \cup \gamma_g \mathcal{H}_1)$$

$$= \mathcal{E} \setminus (\underset{(iv)}{g} \cup \underset{(vi)}{\mathcal{H}_2}) = \mathcal{H}_1 \quad ✓$$

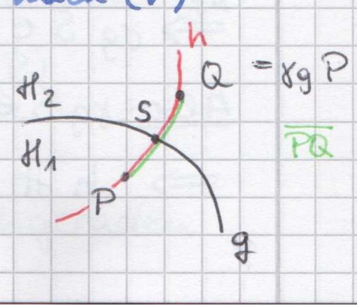
<u>zu Aufgabe 3.3)</u>

(i) $P \in g$: $\gamma_g P = P \Rightarrow \gamma_g\gamma_g P = \gamma_g P = P$ nach (v)

(ii) $P \notin g$:

Sei o.B.d.A. $P \in \mathcal{H}_1$ (HE zu g)

Dann ist wegen (vi) $Q = \gamma_g P \in \mathcal{H}_2$



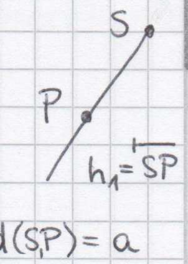
Betrachte $h = PQ$ (ex. nach Ax (II))

Nach HEAx. (VI) ex. $\{S\} = g \cap h$, da $\overline{PQ} \cap g \neq \emptyset$.

Weiter gilt: $\gamma_g h = \gamma_g(SP) \overset{\text{(iv) geradentreu}}{=} \gamma_g S\, \gamma_g P = SQ = h$

Dann: $\gamma_g Q = \gamma_g \gamma_g P \in h \cap \mathcal{H}_1$

Es gilt: $d(\underbrace{\gamma_g\gamma_g P}_{\in \overline{\mathcal{H}}_1 \cap h = h_1}, \underset{\gamma_g\gamma_g S}{\overset{\|}{S}}) = d(\gamma_g P, \gamma_g S) = d(\underset{\in h_1}{P}, S)$ (Längentreue (iii))



Die eindeutige Abtragbarkeit von Längenmaßen (Ax. V) liefert $\boxed{\gamma_g\gamma_g P = P}$.

<u>Bemerkung:</u>

Man sagt manchmal auch: γ_g ist „selbst-involutorisch".

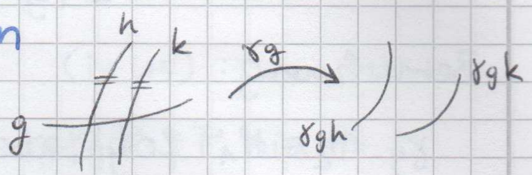
<u>Aufgabe 3.4)</u> (Skript)

Falls $h, k \in G$ mit $h \parallel k$. Was ist dann mit den Geraden $\gamma_g h$, $\gamma_g k$ los?

<u>Vermutung:</u> $\gamma_g h \parallel \gamma_g k$? (Genauer: $h \parallel k \Rightarrow \gamma_g h \parallel \gamma_g k$)

Vielleicht lässt sich das beweisen:

Die logische Kontraposition zu der zu beweisenden (vermuteten) Implikation lautet:



$\gamma_g h \nparallel \gamma_g k \Rightarrow h \nparallel k$

<u>Beweis der Kontraposition:</u>

$\gamma_g h \nparallel \gamma_g k \Rightarrow \underbrace{\gamma_g h \cap \gamma_g k}_{= \gamma_g(h \cap k),\ \text{da } \gamma_g \text{ bijektiv!}} = \{S\} \Rightarrow S \in \gamma_g(h \cap k)$

$\overset{\gamma_g}{\Longrightarrow} \gamma_g S \in \overbrace{\gamma_g\gamma_g}^{=\mathrm{id}}(h \cap k)$

<u>Also:</u> $\gamma_g S \in h \cap k$, genauer: $h \cap k = \gamma_g\gamma_g(h \cap k) = \{\gamma_g S\}$

$\Longrightarrow h \nparallel k$

$\square$

Definition 3.7)

Streckzentrum   Streckfaktor (k<0 zugelassen)

Gegeben sei ein Punkt $\boxed{Z} \in \mathcal{E}$ und $\boxed{k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine reelle Zahl.

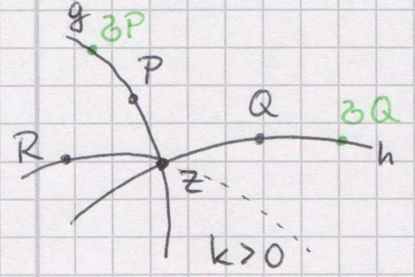
Die Abbildung $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit

(1) $\forall P \in \mathcal{E} : d(Z, \sigma P) = |k| \cdot d(Z,P)$ Ax (V)!

(2) $\forall P \in \mathcal{E} \setminus \{Z\} : (k > 0 \Rightarrow \sigma P \in \overrightarrow{ZP}$

$\wedge\ k < 0 \Rightarrow \sigma P \in ZP \setminus \overrightarrow{ZP})$

heißt Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor k.



Aufgabe 3.12) (Skript) $k=1 : \sigma = id$

Es gilt: Z ist einziger Fixpunkt für σ falls $k \neq 1$.

Beweis:

Für $P = Z$ gilt: $d(Z, \sigma Z) = |k| \cdot \underbrace{d(Z,Z)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow \sigma Z = Z$ ($\Rightarrow$ Z ist Fixpunkt)

Für $P \neq Z$ gilt: Falls $k < 0$, liegen P und σP auf verschiedenen Halbgeraden. Also: $\sigma P \neq P$.

Falls $k > 0$, $k \neq 1$, dann: $d(Z,P) \neq |k|\, d(Z,P) = d(Z, \sigma P)$

$\Rightarrow P \neq \sigma P$.   (alle anderen Punkte ($P \neq Z$) sind keine Fixpunkte) ■

Neue Frage: Lässt sich beweisen, dass σ bijektiv ist?

Zunächst ist $\sigma Z = Z$, d.h. Z ist Urbild zu sich unter σ. Für $P \in \mathcal{E} \setminus \{Z\}$ betrachte Halbgerade $g_1 = \overrightarrow{ZP}$. Für $k > 0$ betrachte $Q \in g_1 = \overrightarrow{ZP}$ mit der Eigenschaft $d(Z,Q) = \frac{1}{|k|} \cdot d(Z,P)$. Q existiert eindeutig nach Ax. V. Dann folgt: $\sigma Q \in \overrightarrow{SP} = g_1$ mit $d(Z, \sigma Q) = |k|\, d(Z,Q) = \frac{|k|}{|k|}\, d(Z,P)$

$\overset{(Ax\ V)}{\Rightarrow} \sigma Q = P$ bzw. $\{Q\} = \sigma^{-1} P$.

Für $k < 0$ suchen wir Q auf der Halbgeraden

$g_2 = ZP \setminus \overline{ZP}$ mit $d(Z,Q) = \frac{1}{|k|} d(Z,P)$.

Dann folgt: $\sigma Q \in g_1 = \overline{ZP}$ und

$d(Z,\sigma Q) = d(Z,P) \overset{(A \times V)}{\Rightarrow} \sigma Q = P$ bzw. $\{Q\} = \sigma^{-1} P$. ▨

⚠ Achtung:

Wir wissen: $\forall P \in E: d(\sigma P, Z) = |k|\, d(P,Z)$.

Frage: Was ist mit $d(\sigma P, \sigma Z)$ in Bezug zu $d(P,Q)$?

σ ist nicht automatisch eine Ähnlichkeitsabb.!