Vorlesung vom 02.07.13:

· Das Streckungsaxiom (IX) und seine Folgen

Ax (IX): Jede Streckung $\zeta: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung.

D.h.: (1) ζ ist bijektiv (ist schon erfüllt aufgrund der Definition der Streckung)

Eigenschaften einer Ähnlichkeitsabb.

(2) ζ ist geradentreu, also: $\forall g \in \mathcal{G}: \zeta g \in \mathcal{G}$ (nicht automatisch erfüllt → siehe Poincaré-Modell)

!!

(3) ζ ist längenverhältnistreu, also in der Voraussetzung auch strecken- und halbgeradentreu.

(4) ζ ist winkelmaßtreu, d.h. insbesondere auch winkelfeldtreu.

$\forall \omega \in \Omega: w(\zeta\omega) = w(\omega)$ $(\zeta\omega \in \Omega)$

Menge aller Winkelfelder in $\mathcal{E}$

Bildwinkelfeld

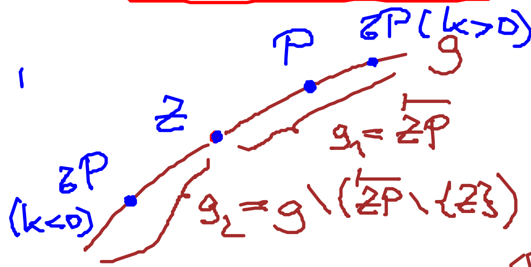
Satz 4.10: $\boxed{\forall g \in \mathcal{G}: \zeta g \parallel g}$

Beweis (s. Skript):

1. Fall: $k=1 \Rightarrow \zeta = id \Rightarrow \zeta g = g \parallel g$ ✓

2. Fall: $k \neq 1 \Rightarrow \boxed{\zeta P = P \Leftrightarrow P = Z}$ Z ist einziger Fixpunkt.

a) $Z \in g$:

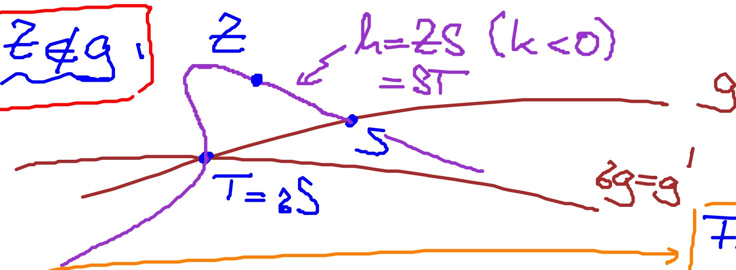


$\zeta g = g$ aufgrund der Definition der Streckung

(Dafür ist Ax IX nicht notwendig)

$\Rightarrow \zeta g = g \parallel g$ ✓

b) $\boxed{Z \notin g}$:



Falls $\zeta g \cap g = \emptyset$, alles „roger"!! $\Rightarrow \zeta g \parallel g$ ✓

Indirekter Beweis!

$\boxed{\text{Falls } \zeta g \cap g \neq \emptyset ?}$ unmöglich!!

$T \in \zeta g \cap g$. Da $T \in \zeta g$: $T = \zeta S$ für $S \in g$ geeignet. $(S \neq Z)$

ζ Streckung mit Zentrum Z Beachte: $Z \notin g$!!

$\Rightarrow T = \zeta S \in ZS = h \Rightarrow h = ZS = ZT = ST \quad (\zeta \neq id)$

Schließlich: $T \in g \wedge T = \zeta S \in \zeta g$ mit $S \in g \Rightarrow \boxed{g = ST = h}$ Ax II

$\Rightarrow Z \in ST = g$ ↯

Also: $\zeta g \cap g \neq \emptyset$ kann nicht sein ■

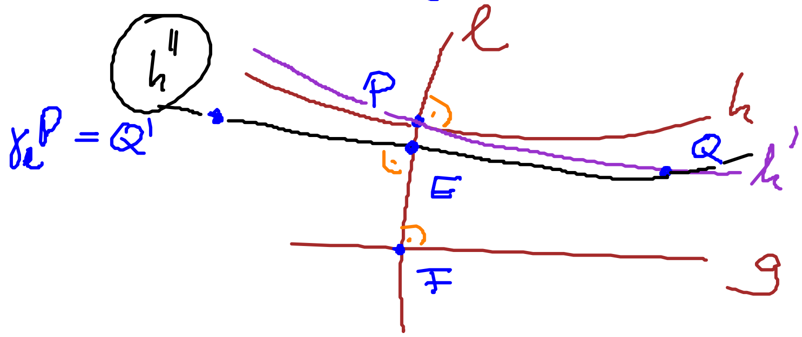
Satz 4.12: (Euklids Parallelenaussage)

Zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ und jedem Punkt $P \in \mathcal{E}$, $P \notin g$ gibt es höchstens eine Gerade (Parallele) $h \in \mathcal{G}$ mit

$$\boxed{P \in h \wedge h \cap g = \emptyset} \Rightarrow h \parallel g$$

Beweis: Wir wissen schon: Das doppelte Lot(fahren) $h \in \mathcal{G}$, gebildet durch das Lot l von P auf g $(l \perp g)$ und Senkrechte $h \perp l$, ist eine Parallele.

z.z.: Es gibt keine andere Parallele



$\ell \perp g \wedge h \perp \ell \Rightarrow h \parallel g$.

Annahme (indirekter Beweis):
Es gäbe $h' \in \mathfrak{g}$ mit $P \in h'$, $h' \parallel g$ und $h' \neq h$.

Sei $Q \in h'$, $Q \notin h$. Dann fälle das Lot h'' von Q auf ℓ (z.B. durch $Q' = \gamma_\ell Q \Rightarrow h'' = Q'Q$). Sei $\{E\} = h'' \cap \ell$ der Lotfußpunkt von Q auf ℓ. Es ist $\boxed{E \neq P}$.

kann also nicht sein!: Falls nicht, wären ja h'' und h zwei Senkrechten zu ℓ in $P = E$, da $Q \in h''$, $Q \notin h$ ↯

Sei weiterhin $\{F\} = g \cap \ell$. Konstruieren wir die Streckung $z = P$, die E (auf ℓ) in F überführt.

Beachte, dass für den Streckfaktor k gilt: E, F liegen bezgl. P auf derselben Halbgeraden zu ℓ

(i) $\boxed{|k| = \dfrac{d(P,F)}{d(P,E)}}$, (ii) $k > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PF} = \ell_1$
$k < 0 \Leftrightarrow P \in \overline{EF}$ $\Leftrightarrow \ell_1 = \overrightarrow{PE} \neq \overrightarrow{PF} = \ell_2$

Bezogen auf die Ähnlichkeitsabb. z als Streckung gilt:

$z\ell = \ell$, $zE = F \in \ell$, $\omega(\sphericalangle QEP) = 90 \Rightarrow \omega(\sphericalangle zQ\,zE\,zP)$ $= \omega(\sphericalangle Q''FP) = 90$

F P (über zE, zP)

Winkeltreue!!

$\Rightarrow zh'' = g$, da Senkrechte zu ℓ in $F = zE$ eindeutig nach Ax VII!!

$\Rightarrow Q'' = zQ \in \underbrace{PQ}_{=h'} \cap g = h' \cap g$

Bild von Q unter der Streckung!

Donnerstag führen wir den Beweis zu Ende!!

ENDE der Vorlesung!