Vorlesung vom 02.05.2013:

- Konvexe Mengen
- Halbebenenaxiom
- Satz von Pasch

} Kapitel 2 (Skript)

1) Konvexe Menge:

Eine Menge $M \subseteq \mathcal{E}$ heißt konvex, wenn mit je 2 Punkten $P, Q \in M$ auch die verbindende Strecke in M liegt:

Anordnungsaxiom (IV)

$$\forall P,Q \in \mathcal{E}: \{P,Q\} \subseteq M \Rightarrow \overline{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cap \overrightarrow{QP} = \{X \in PQ \mid P \leq X \leq Q \vee Q \leq X \leq P\} \subseteq M$$

Strahlen/Halbgeraden auf $g = PQ$

Bemerkung: Jeder Punkt $P \in M$ ist mit jedem Punkt $Q \in M$ „direkt" in M verbindbar!!

also auf der Verbindungsgeraden $g = PQ$, ohne M zu verlassen.

2. Bemerkung: „Konvex" lässt sich als Spezialfall des allgemeineren Begriffs „sternförmig" verstehen. Dabei heißt $M \subset \mathcal{E}$ „sternförmig", wenn gilt:

$$\exists S \in M \; \forall P \in \mathcal{E}: \; P \in M \Rightarrow \overline{PS} \subseteq M$$

Unterschied zu „konvex"

S heißt auch „Sternpunkt" bezüglich M.

Es gilt: Sei $M \subset \mathcal{E}$ sternförmig. Dann gilt:

M konvex $\Leftrightarrow$ Jeder Punkt $S \in M$ ist ein Sternpunkt.

Beispiele aus Skript.

a) $M = \mathcal{E}$: ✓ $\overline{PQ} \subseteq M = \mathcal{E}$ für alle $P,Q \in M = \mathcal{E}$

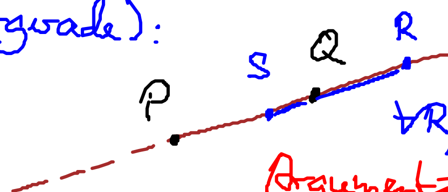
b) $M = g \in \mathcal{G}$, $g \subset \mathcal{E}$: ✓ Für je 2 Punkte $P,Q \in g$ ist per Definition $\overline{PQ} \subseteq PQ = g$ ✓

c) $\emptyset$: „Pathologiefall" ✓ $\forall P,Q \in \mathcal{E}: \{P,Q\} \subseteq \emptyset \Rightarrow \overline{PQ} \subseteq \emptyset$

Falsch!

„$\Longrightarrow$" daher wahr!

d) $M = \overrightarrow{PQ} \subset \mathcal{E}$ (Halbgerade):
$(P,Q \in \mathcal{E})$



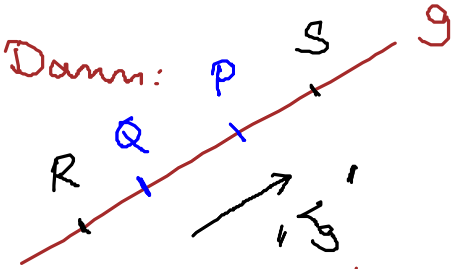
$\forall R,S \in \mathcal{E}: \{R,S\} \subseteq \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overline{RS} \subseteq \overrightarrow{PQ}$ ✓

Argumentation über die Anordnung von R,S in Bezug auf P,Q.

e) $M = \overline{RS} \subset \mathcal{E}$ für $R,S \in \mathcal{E}$ (Strecke):

$\forall P,Q \in \mathcal{E}: \{P,Q\} \subseteq \overline{RS} \Rightarrow \overline{PQ} \subseteq \overline{RS}$ ✓

Beweis: Sei o.B.d.A. $R < S$ auf $g = RS$. Dann:



$\overline{RS} = \{X \in RS \mid R \le X \le S\}$

Wegen $P,Q \in \overline{RS}$:

$R \le P \le S$ und $R \le Q \le S$. Nun haben wir 2 Fälle:

(i) $P \le Q$: Dann $R \le P \le Q \le S$ und $\overline{PQ} = \{X \in RS \mid P \le X \le Q\}$

Also gilt für alle $X \in RS$:

$X \in \overline{PQ} \Leftrightarrow P \le X \le Q$

Außerdem: $\left\{\begin{matrix} R \le P \\ Q \le S \end{matrix}\right\}$

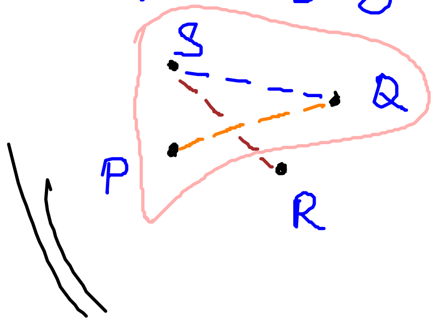
Transitivität der Anordnung „≤" $\Longrightarrow$ $R \le X \le S \Rightarrow X \in \overline{RS}$

$\Longrightarrow \overline{PQ} \subseteq \overline{RS}$ ✓

(ii) $Q \le P$: Analog zu (i).

f) $M = \{P\}$, $P \in \mathcal{E}$: $\overline{PQ} \underset{\boxed{Q=P}}{=} \overline{PP} = \{P\} = M$ „für alle" $Q \in M$ ✓

g) $\mathcal{E}=\{P,Q,R,S\}$; $\mathcal{G}=\{g,h,k\}$ mit $g=\{P,Q\}$, $h=\{R,S\}$, $k=\{Q,S\}$



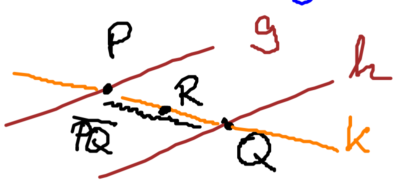
Dann ist in $(\mathcal{E},\mathcal{G})$ die Menge $M=\{P,Q,S\}\subset\mathcal{E}$ nicht konvex, da PS nicht existiert, d.h. $\overline{PS}=\{P,S\}$ nicht als Teil einer Geraden g, h oder k existiert.

Modell geht schon schief, da $(\mathcal{E},\mathcal{G})$ keine Inzidenzgeometrie im Sinne der Axiome (I)–(III).

Satz 2.1: Sei $(\mathcal{E},\mathcal{G})$ eine Geometrie, welche Axiome (I)–(V) erfülle.
Dann gilt: $g,h\in\mathcal{G}$ mit $g\neq h \Rightarrow M=g\cup h$ nicht konvex!

Beweis: Sei $g\neq h$. Dann gilt: (i) $g\cap h=\emptyset$ $(g\parallel h)$, (ii) $g\cap h=\{S\}$

Zu (i):



Sei $P,Q\in M=g\cup h$ mit $P\in g$, $Q\in h$
ex. nach Ax (I)

Dann betrachte die nach Ax (II) existierende Verbindungsgerade $k=PQ$.

Es gilt: $g\cap k=\{P\}$, $h\cap k=\{Q\}$.

z.z.: $\overline{PQ}\not\subseteq M=g\cup h$

Streckenmaßaxiom!

Sei $R\in\overline{PQ}\setminus\{P,Q\}$. R ex. nach Ax (V), z.B. R als Mittelpunkt von $\overline{PQ}$

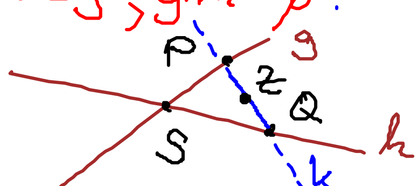
Falls $\overline{PQ}\subseteq M$, dann: $R\in g\cup h$, d.h. $R\in g \vee R\in h$.

α) Wäre $R\in g$, dann gälte: $PR=k\overset{!}{=}g$ nach Ax (II) Eindeutigkeit der Verb.-geraden!

$\Rightarrow Q\in k=g$ ↯ zu $Q\in h$, $g\cap h=\emptyset$

β) Wäre $R\in h$, dann käme man analog auf den Widerspruch:
$P\in k=h$ ↯ zu $P\in g$, $g\cap h=\emptyset$.

Zu (ii): $g\cap h=\{S\}$



$P\in g$, $P\neq S$ und $Q\in h$, $Q\neq S$ gesichert durch Ax (I)

Insbesondere ist $P\neq Q$, da sonst

$g = PS = QS = h$ ↯ zu $g \neq h$!

Dann betrachte Verbindungsstrecke $\overline{PQ} \subset PQ =: k$ und d. Mittelpunkt $Z \in \overline{PQ}$ (Existenz durch Ax (V) gesichert)

z.z.: $Z \notin M = g \cup h$

Beweis dieser Aussage als Widerspruchsbeweis analog zum Fall $g \cap h = \emptyset$

α) Wäre $Z \in g$, dann: $k = PZ = g \Rightarrow Q \in k = g$ ↯ $Q \notin g$, da $g \cap h = \{S\}$

$\Rightarrow Z \notin g$!!

β) Wäre $Z \in h$, dann: $k = ZQ = h \Rightarrow P \in k = h$ ↯ $P \notin h$, da $g \cap h = \{S\}$

Bemerkung: Im Fall $g \cap h = \{S\}$ ist $M = g \cup h$ zumindest sternförmig mit Sternpunkt S

Satz 2.2: Sind $M_1, \dots, M_n$ n konvexe Mengen in $\mathcal{E}$, dann ist auch

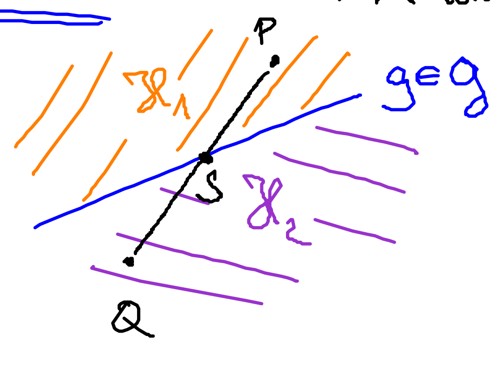
$$\boxed{M := \bigcap_{k=1}^{n} M_k = M_1 \cap \dots \cap M_n} \quad \text{konvex}$$

Gilt auch für den Schnitt „∞-vieler" Mengen M_k.

Beweis: wird nachgeholt!!

Neues Axiom (VI): Halbebenenaxiom!! (Siehe Skript!)

Skizze:



$\mathcal{E} \setminus g = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ mit

(i) $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ disjunkt $\quad \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$

(ii) $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ konvex

(iii) $\underbrace{\forall P \in \mathcal{H}_1 \ \forall Q \in \mathcal{H}_2}_{\text{impliziert: } P \neq Q} : \overline{PQ} \cap g = \{S\}$

Beachte: $h = PQ \neq g$

Das HE-Axiom (VI) ist logisch äquivalent zum

Satz 2.5 (Pasch):

Schneidet eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ ein Dreieck ΔPQR (P, Q, R nicht kollinear) an einer Seite im Innern, so muss g einen weiteren Schnittpunkt mit einer der beiden anderen Seiten haben!!

Beweis: Am kommenden Dienstag!