Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

SS 2013
30.05.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

7. Übungsblatt zur „Elementargeometrie“

(Zentralabgabe der Hausaufgaben: *11.06.2013, 14:00 Uhr*)

28. Aufgabe:

Gegeben seien die beiden Punkte $P = (0,1)$ und $Q = (0,r)$ mit $r > 0$, $r \neq 1$ in der Poincaré-Halbebene $\boldsymbol{E}_N = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, y > 0\}$.

a) (**Übungsaufgabe**) Bestimmen Sie zeichnerisch (mit Zirkel und Lineal) sowie rechnerisch die Gleichung der beiden Senkrechten h_N in P und k_N in Q zu $g_N = PQ$ sowie der nichteuklidischen Winkelhalbierenden w_N durch P bezüglich des durch h_{N1} und g_{N1} berandeten Rechtwinkelfeldes $\mathcal{W} = \sphericalangle g_{N1} h_{N1}$ mit $\omega(\sphericalangle g_{N1} h_{N1}) = 90$

b) (**Hausaufgabe**) Weisen Sie sowohl durch Rechnung als auch durch eine entsprechende Skizze nach, dass sich die beiden nichteuklidischen Geraden k_N und w_N nur in dem Fall in einem Punkt $R \in \boldsymbol{E}_N$ schneiden, wenn $\sqrt{2} - 1 < r < \sqrt{2} + 1$ ist.

c) (**Hausaufgabe**) Zeigen Sie durch Rechnung, dass für das Winkelmaß $\alpha = \omega(\mathcal{W})$ des nichteuklidischen Winkelfeldes $\mathcal{W} = \sphericalangle PRQ_N$ mit Scheitelpunkt R gilt:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und damit} \quad \alpha < \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45 .$$

Folgern Sie daraus, dass in dem nichteuklidischen Dreieck ΔPQR die Winkelsumme kleiner als 180 ist. Welchem Winkelmaß strebt $\alpha = \omega(\mathcal{W})$ im Falle $\lim r \to \sqrt{2} + 1$ sowie im Falle $\lim r \to \sqrt{2} - 1$ zu?

(Hinweis zu (c): Zur Winkelbestimmung greife man auf das Skalarprodukt im $\boldsymbol{R}^2$ der Ortsvektoren zu R bezüglich der beiden „euklidischen“ Mittelpunkte von k_N und w_N zurück und benutze an geeigneter Stelle, dass für zwei Zahlen $a,b > 0$ stets der arithmetische Mittelwert echt größer als der geometrische Mittelwert ist – d.h. es gilt: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) > \sqrt{a \cdot b}$ –, sofern $a \neq b$ gilt.)

	12,0

29. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

Sei $P, Q \in \boldsymbol{E}$ beliebig mit $P \neq Q$ und $m \in \boldsymbol{G}$ die gemäß Definition 3.6 im Skript eingeführte Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$.

a) Zeigen Sie: m ist Symmetrieachse der Strecke $\overline{PQ}$. Folgern Sie daraus:

$$\bigwedge_{R \in m} d(R,P) = d(R,Q)$$, d.h. die Punkte auf m liegen von P und Q gleich weit entfernt.

b) $\bigwedge_{R \in \boldsymbol{E}} d(R,P) = d(R,Q) \;\to\; R \in m$, d.h. von P und Q gleich weit entfernte Punkte $R \in \boldsymbol{E}$ liegen auf der Mittelsenkrechten m.

(Hinweis: Man verwende für Teil (a) Satz 3.3 und zeige in (b), daß für die Winkelhalbierende w des Winkelfeldes $\mathcal{W} = \sphericalangle PRQ$ gilt: $w = m$.)

– *Bitte wenden* –

30. Aufgabe (**Hausaufgabe**):

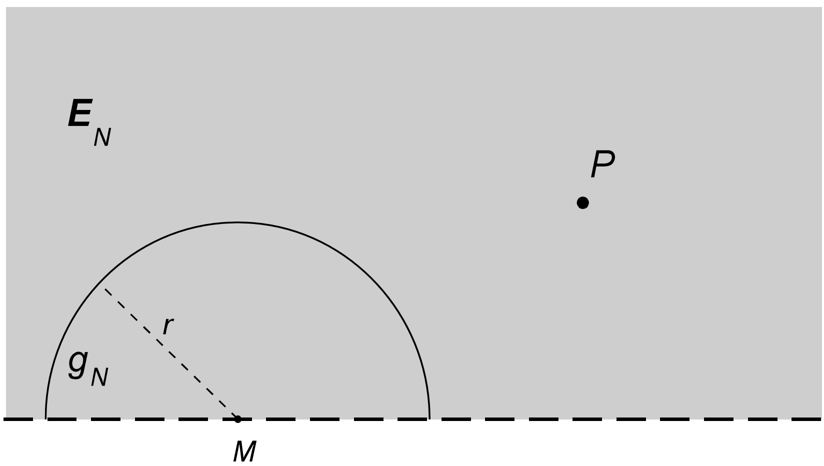
a) Beweisen Sie, dass in jeder Geometrie $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$, welche die Axiome (I) bis (VIII) erfüllt, für alle Geraden $g,h,k\in\boldsymbol{G}$ gilt: $g \perp h$ und $h \perp k \Rightarrow g \parallel k$.

b) Zeigen Sie unter Rückgriff auf Teil (a), dass durch das *doppelte Lot* in $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ die Existenz von Parallelen gesichert ist, d.h. dass gilt:

Zu jeder Geraden $g\in\boldsymbol{G}$ und zu jedem Punkt $P\in\boldsymbol{E}$ mit $P\notin g$ existiert mindestens eine Gerade $k\in\boldsymbol{G}$ mit $P\in k$ und $g \parallel k$.

c) Geben Sie für die Poincarésche Halbebene $(\boldsymbol{E}_N,\boldsymbol{G}_N)$ unter Verwendung der Konstruktionsvorschrift für die nichteuklidische Achsenspiegelung γ_{g_N} auf Seite 3.16 im Skript eine *euklidische* Konstruktionsbeschreibung für das *Lot* sowie das *doppelte Lot* in einem Punkt $P\in\boldsymbol{E}_N$ zu einer gegebenen Geraden $g_N\in\boldsymbol{G}_N$ mit $P\notin g_N$ und fügen Sie ergänzend für den Fall (i) eines euklidischen Halbkreises g_N – siehe nachfolgende Ausgangsskizze – sowie (ii) einer euklidischen Halbgeraden g_N jeweils eine Konstruktionsskizze mit Zirkel und Lineal für das doppelte Lot $k_N\in\boldsymbol{G}_N$, $P\in\boldsymbol{E}_N$ bei.

Skizze für den Fall (i) zu (c) :



	8,0