Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

SS 2013
29.06.2013

11. Übungsblatt zur „Elementargeometrie“
(Keine Haus-, sondern reine *Präsentationsaufgaben*)

43. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

Sei $g \in \boldsymbol{G}$ eine Gerade und $\beta : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ eine Kongruenzabbildung. Beweisen Sie:

Ist γ_g die Spiegelung an der Geraden g und $\gamma_{\beta g}$ die Achsenspiegelung an der Bildgeraden $\beta g \in \boldsymbol{G}$, so gilt: $\gamma_{\beta g} = \beta \circ \gamma_g \circ \beta^{-1}$.

Hinweis: Man zeige, daß die Abbildung $\beta \circ \gamma_g \circ \beta^{-1}$ alle Eigenschaften einer Achsenspiegelung mit Fixpunktgerade $\beta g \in \boldsymbol{G}$ hat, und benutze dann das Axiom VIII .

44. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

Beweisen Sie folgende *Variante* des 1. Strahlensatzes unter Rückgriff auf die im Skript bewiesene Version des 1. Strahlensatzes:

Sind g_1 und h_1 zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Ausgangspunkt S , welche von zwei parallelen Geraden k_1 und k_2 außerhalb von S geschnitten werden, wobei gelte:

$$g_1 \cap k_1 = \{G_1\} \text{ , } g_1 \cap k_2 = \{G_2\} \text{ sowie } h_1 \cap k_1 = \{H_1\} \text{ , } h_1 \cap k_2 = \{H_2\} \text{ ,}$$

dann gilt:

(i) $\dfrac{d(S,G_1)}{d(G_1,G_2)} = \dfrac{d(S,H_1)}{d(H_1,H_2)}$ sowie (ii) $\dfrac{d(S,G_2)}{d(G_1,G_2)} = \dfrac{d(S,H_2)}{d(H_1,H_2)}$

Hinweis: Fertigen Sie eine entsprechende Skizze an !!!

45. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

Seien im (nicht entarteten) Dreieck $\Delta\, ABC$ der B gegenüber liegende Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ mit M_B und der C gegenüber liegende Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ mit M_C bezeichnet. Zeigen Sie unter Anwendung der beiden Strahlensätze und gültiger Umkehrungen (siehe Skript):

Die beiden Seitenhalbierendenabschnitte $\overline{BM_B}$ und $\overline{CM_C}$ im Dreieck $\Delta\, ABC$ schneiden sich in einem Schnittpunkt S , der die beiden Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis $2:1$ zerlegt, d.h. es gilt: $\dfrac{d(B,S)}{d(S,M_B)} = \dfrac{d(C,S)}{d(S,M_C)} = \dfrac{2}{1}$.

Hinweis: Man fertige zunächst eine Skizze an und weise nach: $M_B M_C \,||\, BC$ sowie

$$d(M_B,M_C) = \frac{1}{2} \cdot d(B,C) \text{ .}$$

46. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

Sei im (nicht entarteten) Dreieck $\Delta\, ABC$ mit $s = d(A,M_A) + d(B,M_B) + d(C,M_C)$ die Summe der *Seitenhalbierendenabschnitte* und mit $u = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A)$ der *Umfang* dieses Dreiecks bezeichnet.

– Bitte wenden –

Zeigen Sie, daß für s folgende Abschätzung gilt: $\frac{3}{4} \cdot u < s < u$.

Hinweis: Unter Zuhilfenahme einer geeigneten Skizze schätze man zum Nachweis der linken Ungleichung jede der Seiten $d(A,B)$, $d(B,C)$ und $d(C,A)$ unter Rückgriff auf die Aussage in Aufgabe 45 und mithilfe der Dreiecksungleichung für die Metrik $d(P,Q)$ geeignet ab.

Für den Nachweis der rechten Ungleichung betrachte man die Punktspiegelungen σ_{M_A} , σ_{M_B} , σ_{M_C} an den Seitenmittelpunkten M_A , M_B und M_C und wende wieder die Dreiecksungleichung geignet an, um $d(A,M_A)$, $d(B,M_B)$ sowie $d(C,M_C)$ über die Seitenlängen $d(A,B)$, $d(B,C)$ und $d(C,A)$ abzuschätzen.