Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

SS 2013
22.06.2013

10. Übungsblatt zur „Elementargeometrie“

(Zentralabgabe der Hausaufgaben: *02.07.2013, 14:00 Uhr*)

38. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

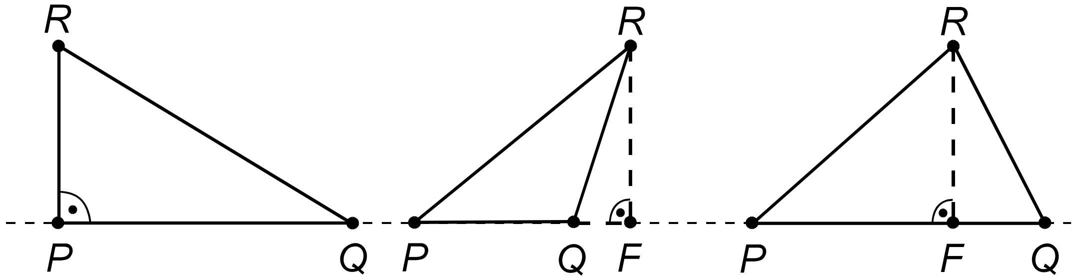
Man zeige (Satz 4.1), dass in einem gleichschenkligen Dreieck ΔPQR mit $d(P,R) = d(R,Q)$ die Mittelsenkrechte m zur Seite $\overline{PQ}$ zugleich die Winkelhalbierende w_R des Winkelfeldes $\mathrm{W} = \measuredangle PRQ$ ist.

39. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

In der Vorlesung und in der Übungsaufgabe 8(b) wurde die Dreiecksungleichung für drei *kollineare* Punkte $P,Q,R \in \boldsymbol{E}$ bewiesen. Zeigen Sie nun unter Rückgriff auf Satz 4.6 im Skript, daß für drei *nicht kollineare* Punkte $P,Q,R \in \boldsymbol{E}$ stets gilt (Satz 4.7):

$$d(P,Q) < d(P,R) + d(R,Q).$$

Skizze:



(a) (b) (c)

Hinweis: Unterscheiden SIe für $R \notin PQ$ die drei skizzierten Lagemöglichkeiten für R und beachten Sie die Anleitung zum Beweis von Satz 4.7 im Skript.

	6,0

40. Aufgabe:

Formalisieren Sie zunächst die folgenden Aussagen und beweisen Sie sie dann:

a) (**Übungsaufgabe**)

In jedem (echten) Dreieck ist jede Seite länger als der Betrag der Differenz der Längen der beiden anderen Seiten.

b) (**Hausaufgabe**)

In jedem (echten) Dreieck liegt der längeren von zwei Seiten der Scheitel des größeren Innenwinkelfeldes gegenüber.

Hinweis zu (a): Man verwende Satz 4.7.
Hinweis zu (b): Man führe einen indirekten Beweis bzw. einen Beweis durch Kontraposition unter Rückgriff auf die Sätze 4.5 und 4.8.

	6,0

41. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

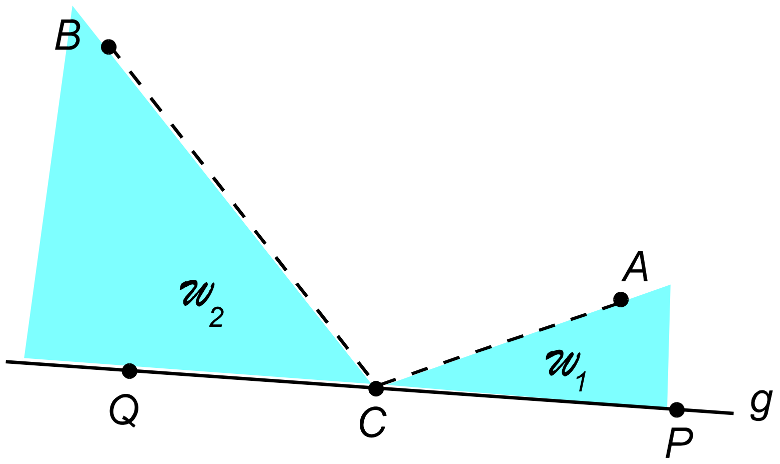
Man löse im Folgenden das sogenannte *Heronsche Lichtstrahl-Problem* aus der Physik:

– Bitte wenden –

Ein Lichtstrahl wird von A nach B gesendet, wobei er an einer gegebenen Geraden $g \in \mathbf{G}$ „gespiegelt“ wird (siehe Skizze). Gesucht wird der kürzeste Weg für den Lichtstrahl.

a) Bestimmen Sie konstruktiv zunächst den Punkt $C \in g$, für welchen $s = d(A,C) + d(C,B)$ minimal wird, und zeigen Sie dabei zugleich, dass für jeden Punkt $C' \in g$ mit $C' \neq C$ gilt: $d(A,C') + d(C',B) > s$.

b) Beweisen Sie zusätzlich, dass für die Winkelfelder $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ gemäß Skizze mit dem aus Teil (a) ermittelten Scheitelpunkt C gilt: $\omega(\mathcal{W}_1) = \omega(\mathcal{W}_2)$, d.h.: der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel im Punkt C.



Hinweis: Man verwende die Dreiecksungleichung sowie die Tatsache, dass Achsenspiegelungen spezielle Kongruenzabbildungen darstellen.

	8,0

42. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Wir zeigen, dass in der Poincarè-Halbebene das Streckungsaxiom (IX) nicht erfüllt ist. Dazu betrachten wir das Bild der nichteuklidischen Geraden $g_N = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \mid x = 0\}$ unter der (nichteuklidischen) Streckung $\sigma_Z : \mathbf{E}_N \to \mathbf{E}_N$ mit Zentrum $Z = (-1,2)$ und Streckfaktor $k = 2$.

a) Bestimmen Sie zeichnerisch für die Punkte $P = (0,1)$, $Q = (0,2)$ und $R = (0,4)$ auf g_N jeweils die nichteuklidischen Halbgeraden $h_{N_1} = {}^{|}\overline{ZP}$, $k_{N_1} = {}^{|}\overline{ZQ}$ sowie $l_{N_1} = {}^{|}\overline{ZR}$ und ermitteln Sie entsprechend die Punkte $A \in h_{N_1}$ mit $d(A,P) = d(P,Z)$, $B \in k_{N_1}$ mit $d(B,Q) = d(Q,Z)$ sowie $C \in l_{N_1}$ mit $d(C,R) = d(R,Z)$.

b) Zeigen Sie anhand der drei Bildpunkte $A = \sigma_Z P$, $B = \sigma_Z Q$ und $C = \sigma_Z R$, dass das Bild $\sigma_Z g_N$ von g_N gilt: $\sigma_Z g_N \notin \mathbf{G}_N$. Damit stellt die Streckung σ_Z *keine geradentreue* Abbildung dar.

Hinweis: Zur Konstruktion der Punkte A,B,C greife man auf die Hausaufgabe 34(b) zurück, d.h. auf das konstruktive Verfahren des Abtragens nichteuklidisch gleichlanger Strecken auf einer nichteuklidischen Geraden.