Freie Universität Berlin SS 2013
Fachbereich Mathematik 16.04.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

1. Übungsblatt zur „Elementargeometrie“

(Zentralabgabe der Hausaufgaben: *30.04.2013, 14:00 Uhr*)

1. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Sei $\boldsymbol{E}$ die Menge der Punkte einer Kugeloberfläche und $\boldsymbol{G}$ die Menge der Großkreise in $\boldsymbol{E}$ (das sind die Schnittlinien zwischen der Kugeloberfläche und den Ebenen durch den Kugelmittelpunkt, welche die Geraden darstellen).

Untersuchen Sie, ob $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ eine Geometrie der Ebene im Sinne der Inzidenzaxiome (I) bis (III) aus dem Skript darstellt. Wenn nein, läßt sich das Modell so modifizieren, daß die drei Axiome erfüllt sind?

2. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Folgern Sie aus der Gültigkeit der Inzidenzaxiome (I) bis (III) die folgenden Aussagen für eine ebene Geometrie $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$:

a) Zu jedem Punkt $P\in\boldsymbol{E}$ gibt es (mindestens) zwei Geraden $g,h\in\boldsymbol{G}$ mit $g\cap h=\{P\}$.

b) Zu jeder Geraden $g\in\boldsymbol{G}$ gibt es (mindestens) einen Punkt $P\in\boldsymbol{E}$ mit $P\notin g$.

c) Zu jedem Punkt $P\in\boldsymbol{E}$ gibt es (mindestens) eine Gerade $g\in\boldsymbol{G}$ mit $P\notin g$.

3. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Eine Ebene $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ heißt *affin*, wenn neben den drei Inzidenzaxiomen (I), (II) und (III) aus der Vorlesung zusätzlich das *Parallelenaxiom* (P) gilt:

(P) Zu jeder Geraden $g\in\boldsymbol{G}$ und zu jedem Punkt $P\in\boldsymbol{E}$ mit $P\notin g$ gibt es genau eine Gerade $h\in\boldsymbol{G}$ mit $P\in h$ und $g\cap h=\emptyset$.

Zeigen Sie:

a) Das Axiom (P) ist von den übrigen Axiomen (I) bis (III) unabhängig.

b) Jede affine Ebene besitzt mindestens 4 verschiedene *Punkte* und mindestens 6 verschiedene *Geraden*. Geben Sie zudem ein Modell für die kleinstmögliche affine Ebene $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ an.

c) Aus der zusätzlichen Gültigkeit des Parallelenaxioms (P) folgt die Transitivität der Relation $\parallel$ zwischen Geraden, d.h. für beliebige Geraden $g,h,k\in\boldsymbol{G}$ gilt:

$$g\parallel h \wedge h\parallel k \;\rightarrow\; g\parallel k$$

(Hinweis: Zum Nachweis der Transitivität der Parallelitätsrelation in Teil c) mache man die Fallunterscheidung (i) $g=h \vee h=k$ und (i) $g\neq h \wedge h\neq k$.)

	15,0

4. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Zeigen Sie:

a) Die drei Metrikaxiome aus der Definition 1.6 im Skript sind voneinander unabhängig.

b) Für jede Metrik $d: M\times M\rightarrow \boldsymbol{R}$ gilt: $\bigwedge_{P\in M}\bigwedge_{Q\in M} d(P,Q)\geq 0$

5. Aufgabe:

Man beweise, daß durch die folgenden Abbildungen $d : M \times M \to \boldsymbol{R}$ das Paar (M,d) jeweils zu einem metrischen Raum (M,d) wird.

a) (**Übungsaufgabe**): $M = \boldsymbol{R}^+ = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > 0\}$ und $d(x, y) := \left| \ln \left(\frac{x}{y}\right) \right|$ $(x,y \in \boldsymbol{R}^+)$

b) (**Hausaufgabe**): $M = \boldsymbol{R}$ und $d(x, y) := \ln (1 + |x-y|)$ $(x,y \in \boldsymbol{R})$

(*Hinweis:* Man verwende hier die aus der Schule her bekannten Eigenschaften des Betrages und der Logarithmusfunktion *ln* , insbesondere die Monotonie und die Funktionalgleichung.)

	5,0