Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

WiSe 2013/14
11.12.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

7. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

(Abgabe der Hausaufgaben: *19.12.2013*)

28. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Der Graph einer Funktion $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ bestehe aus einem nach unten geöffneten Parabelbogen mit Scheitelpunkt $S = (-1;4)$, welche im Punkt $P = (1;2)$ in eine Gerade übergeht, welche durch den weiteren Punkt $Q = (3;-1)$ verläuft.

a) Stellen Sie die explizite Abbildungssvorschrift $y = f(x)$ für die Funktion auf und skizzieren Sie ihren Graphen.

b) Skizzieren Sie zusätzlich die Graphen der folgenden Funktionen g und h und beschreiben Sie, wie diese Graphen geometrisch aus dem Ausgangsgraphen von f resultieren:

(i) $g(x) = -f(2x - 3)$ und (ii) $h(x) = 3 f(-x) + 2$.

29. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Der Graph einer Funktion $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ bestehe „links“ aus einem Parabelbogen, der durch die Punkte $P = (-3;-2)$, $Q = (1;2)$ sowie $R = (2;1)$ verläuft und „rechts“ aus der anteiligen Geraden, welche durch die Punkte $S = (4;-2)$ und $T = (7;2)$ geht.

a) Stellen Sie erst einmal getrennt die quadratische Funktion in der Scheitelpunktform und die affin lineare Funktion in der auf S bezogenen Punktrichtungsform dar.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Graphenteile und ermitteln Sie daraus die (zusammengesetzte) Abbildungsvorschrift $y = f(x)$ für die Funktion. Skizzieren Sie schließlich ihren Graphen.

c) Skizzieren Sie zusätzlich die Graphen der Funktionen
(i) $g(x) = -2 \cdot f(-x) - 2$ und (ii) $h(x) = f(-2x + 3)$.
Wie hängen geometrisch die Graphen von g und h mit dem Ausgangsgraphen von f zusammen? Beschreiben Sie dies anhand der Begriffe Streckung, Verschiebung und Spiegelung.

10,0	

30. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Gegeben sei die Gleichung $(*)$ $\frac{4}{3}e^{-x} + (x-1)(x-5) = 0$ sowie die beiden reellen Funktionen $f,g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{4}{3}e^{-x}$ bzw. $g(x) = -x^2 + 6x - 5$ $(x \in \boldsymbol{R})$.

a) Zeigen Sie *graphisch*: Die Gleichung $(*)$ besitzt genau zwei reelle Lösungen.

b) Bestimmen Sie zusätzlich jeweils die Kardinalzahl *card* A_i $(i = 1,2,3)$ zu folgenden Mengen:

(i) $A_1 = \{x \in \boldsymbol{R} \mid f(x) = g(x)\} \cap [0,1[$, (ii) $A_2 = \{x \in \boldsymbol{R} \mid f(x) = g(x)\} \cap [1,5[$,

(iii) $A_3 = \{x \in \boldsymbol{R} \mid f(x) = g(x)\} \cap [5,+\infty[$, (iv) $A_1 \cap A_3$

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion (*Komposition*) $h = f \circ g$.

<u>31. Aufgabe:</u>

a) (**Übungsaufgabe)**

Sei $f : D_f \to \boldsymbol{R}$ eine reelle Funktion mit einem zu $x_0 = 0$ symmetrischen Definitionsbereich $D_f \subseteq \boldsymbol{R}$. Zeigen Sie:

f lässt sich eindeutig zerlegen in eine Summe $f = f_g + f_u$, gebildet aus einer geraden Funktion $f_g : D_f \to \boldsymbol{R}$ und einer ungeraden Funktion $f_u : D_f \to \boldsymbol{R}$. Für die beiden Summanden gilt:

$$f_g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad (x \in D_f) \ , \quad f_u(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \quad (x \in D_f) \ .$$

b) (**Hausaufgabe)**

Wie sehen im Fall der Exponentialfunktion $exp : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $exp\,(x) = e^x$ $(x \in \boldsymbol{R})$ die beiden gemäß Teil (a) gebildeten Funktionen $cosh := exp_g$ (*Cosinus hyperbolicus*) und $sinh := exp_u$ (*Sinus hyperbolicus*) aus? Beweisen Sie aus der Darstellung der beiden hyperbolischen Funktionen die folgenden Identitäten:

(i) $cosh^2(x) - sinh^2(x) \equiv 1$, (ii) $cosh^2(x) + sinh^2(x) = cosh\,(2x)$,

(iii) $2\, sinh\,(x)\, cosh\,(x) = sinh\,(2x)$.

Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen $cosh : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ und $sinh : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ sowie der Funktionen $f\,(x) = \dfrac{1}{2} exp\,(x)$ und $g\,(x) = f\,(-x)$.

8,0	