Freie Universität Berlin WiSe 2013/14
Fachbereich Mathematik 02.12.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

6. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

(Abgabe der Hausaufgaben: *10.12.2013*)

24. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

Sei mit $S_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis um $O = (0,0)$ mit Radius $r = 1$ gegeben. Weiterhin sei für festes, aber beliebig gewähltes $a \in \mathbf{R}, a > 0$ die Abbildung

$$f : S_1 \to \mathbf{R}^2 ,\ f(x,y) = (ax, ay) \text{ sowie } g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

definiert.

a) Geben Sie eine visuelle Darstellung für die Abbildung f an. Ist f injektiv und/oder surjektiv?

b) Bestimmen Sie das Urbild $g^{-1}([2,+\infty[)$ des Intervalls $[2,+\infty[= \{x \in \mathbf{R} : x \geq 2\}$ unter der Funktion g an.

c) Untersuchen Sie die verknüpfte Abbildung (Komposition) $h = g \circ f : S_1 \to \mathbf{R}$. Ist h injektiv und/oder surjektiv?

25. Aufgabe (**Hausaufgabe**):

a) Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right)$. Zeigen Sie:

f ist injektiv, und es gilt: $f(\mathbf{R}) \subseteq S_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g :]-1,1[\to \mathbf{R}$, $g(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ bijektiv ist. Leiten Sie die Abbildungsvorschrift für die Umkehrfunktion $g^{-1} : \mathbf{R} \to]-1,1[$ her.

	10,0

26. Aufgabe:

Gegeben seien die folgenden sechs reellen Funktionen:

$$f_0(x) = id(x) = x,\ f_1(x) = 1 - x,\ f_2(x) = \frac{1}{x},\ f_3(x) = \frac{1}{1-x},\ f_4(x) = \frac{x}{x-1},\ f_5(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Ü a) Bestimmen Sie den größtmöglichen *gemeinsamen* Definitionsbereich $D \subseteq \mathbf{R}$ für alle sechs Funktionen und berechnen Sie sämtliche Kompositionen $h_k = f_1 \circ f_k$ $(k = 1,\ldots,5)$.

H b) Erstellen Sie eine Verknüpfungstafel für sämtliche möglichen Kompositionen $h = f_i \circ f_k$ aus den sechs gegebenen Funktionen f_i $(i = 0,\ldots,5)$. Zeigen Sie:
Die Funktionenmenge $F = \{f_k : D \to \mathbf{R} : k = 0,...,5\}$ bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe. Welches sind jeweils die *inversen* Elemente zu den einzelnen f_k?

	10,0

27. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Seien die Mengen $I = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} :\ f \text{ injektiv}\}$ und $S = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} :\ f \text{ surjektiv}\}$ gegeben.

a) Geben Sie eine mengentheoretische Beschreibung für $B = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} :\ f \text{ bijektiv}\}$.

b) Zeigen Sie, dass die Mengen I und S hinsichtlich der Komposition „$\circ$" von Abbildungen abgeschlossen sind.

c) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ zwei Abbildungen mit $f \circ g = id_B$. Zeigen Sie, dass dann folgt: f ist surjektiv und g ist injektiv.

28. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Der Graph einer Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bestehe aus einem nach unten geöffneten Parabelbogen mit Scheitelpunkt $S = (-1;4)$, welche im Punkt $P = (1;2)$ in eine Gerade übergeht, welche durch den weiteren Punkt $Q = (3;-1)$ verläuft.

a) Stellen Sie die explizite Abbildungssvorschrift $y = f(x)$ für die Funktion auf und skizzieren Sie ihren Graphen.

b) Skizzieren Sie zusätzlich die Graphen der Funktionen
(i) $g(x) = -f(x-2)$ und (ii) $h(x) = f(-x) + 2$.

10,0	