StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

4. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“
(Abgabe der Hausaufgaben: *26.11.2013*)

14. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Geben sei ein Körper $(K, +, \cdot)$. Weiterhin gebe es einen Teilbereich $P \subseteq K$, *Positivbereich* genannt, mit folgenden drei Eigenschaften:

(i) (*TRI*) $\forall\, a \in K$: entweder $a \in P$ oder $a = 0$ oder $-a \in P$,

(ii) (*VA*) $\forall\, a,b \in K:\ a \in P \wedge b \in P \Rightarrow a + b \in P$,

(iii) (*VM*) $\forall\, a,b \in K:\ a \in P \wedge b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$.

a) Man beweise, dass durch $(*)$ $a < b :\Leftrightarrow b - a \in P$ ein *strenge lineare* (*konnexe*) *Ordnungsrelation* auf K definiert ist. Zeigen Sie weiterhin, dass dann durch
$(**)$ $a \le b :\Leftrightarrow a < b \vee a = b$ automatisch eine *Anordnung* auf K induziert wird.

b) Beweisen Sie unter Rückgriff auf Definition $(*)$ folgende *Ungleichungsregeln* in $(K, <)$:
(i) $\forall\, a,b,c \in K:\ a < b \Rightarrow a + c < b + c$, (ii) $\forall\, a,b,c \in K:\ a < b \wedge 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$,
(iii) $\forall\, a,b,c \in K:\ a < b \wedge c < 0 \Rightarrow b \cdot c < a \cdot c$, (iv) $\forall\, a,b,c \in K:\ 0 < a < b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$,
(v) $\forall\, a \in K^* = K \setminus \{0\}:\ a^2 > 0$.

15. Aufgabe:

Ü (a) Für zwei beliebige reelle Zahlen $a > 0$, $b > 0$ bezeichne $A(a,b) := \dfrac{a+b}{2}$ das *arithmetische*, $G(a,b) := \sqrt{ab}$ das *geometrische*, $H(a,b) := \dfrac{2ab}{a+b}$ das *harmonische* und $Q(a,b) := \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ das *quadratische Mittel* von a und b.

Zeigen Sie, dass gilt: $\min(a,b) \le H(a,b) \le G(a,b) \le A(a,b) \le Q(a,b) \le \max(a,b)$,
wobei in jedem Teil “=” genau dann auftritt, wenn $a = b$ ist.

H (b) Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der Ungleichungsregeln aus Aufgabe 14 sowie dem Betrag für reelle Zahlen die Lösungsmengen $\boldsymbol{L}$ der folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie $\boldsymbol{L}$ als Teilmenge der jeweiligen betrachteten Grundmenge.

(i) $\boldsymbol{L} = \left\{ x \in \boldsymbol{R} :\ \dfrac{4x-3}{2x+1} \le \dfrac{2x+3}{x+2} \right\}$, (ii) $\boldsymbol{L} = \left\{ x \in \boldsymbol{R} :\ |x-4| + |2-x| \le 2 \right\}$, ,
(iii) $\boldsymbol{L} = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 :\ x > 1 \wedge x + 2y < 4 \wedge y + 3 > x \right\}$.

	12,0

16. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Sei H die Menge aller Menschen (homo sapiens) sowie F die Menge aller Frauen und $M = H \setminus F$ die Menge aller Männer. Betrachte dann die folgenden Abbildungen:

(i) $f : H \to H$, $f(x)$ ist (biologische) Mutter von $x \in H$,

(ii) $g : H \to H$, $g(x)$ ist (biologischer) Vater von $x \in H$,
(iii) $h : H \to F \times M$, $h(x)$ ist (biologisches) Elternpaar von $x \in H$.
Insbesondere gilt dann für jeden Menschen $x \in H$: $h(x) = (a,b) = (f(x), g(x))$.

a) Beschreiben Sie in Worten die zusammengesetzten Abbildungen (*Kompositionen*) (i) $f^2 = f \circ f$, (ii) $f \circ g$, (iii) $g \circ f$ und (iv) $g^2 = g \circ g$. Gilt insbesondere $f \circ g = g \circ f$?
b) Geben Sie jeweils (mit Begründung) an, ob die Abbildungen f, g und h *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* sind.
c) Zu beliebigem $y \in H$ und $(a,b) \in F \times M$ gebe man die *Urbildmengen* $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$, $g^{-1}(y) = g^{-1}(\{y\})$ sowie $h^{-1}(a,b) = h^{-1}(\{(a,b)\})$ in beschreibender Form an. Welchen mengentheoretischen Zusammenhang besitzen diese drei Mengen?

__17. Aufgabe__ __(Hausaufgabe)__*:*

Sei $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$ sowie $A \times A$ die Menge der möglichen „Augenpaare“ beim Wurf mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln. Weiter sei die Abbildung $f : A \times A \to \mathbf{N}$ gegeben durch

$$f(a,b) = a^b \quad \text{für} \quad (a,b) \in A \times A ,$$

also $f(a,b)$ als der aus den Ergebnissen beider Würfel gebildeten Potenz.

a) Geben Sie explizit an: $f(3,1)$, $f(1,3)$ und $f(5,5)$.
b) Untersuchen Sie, ob f injektiv ist, und bestimmen Sie das Bild $f(A \times A)$ von f .
c) Bestimmen Sie (explizit) die *Bildmenge* $f(C) \subseteq \mathbf{N}$ für $C = \{ (x,2);\, x \in A\} \subseteq A \times A$ sowie die *Urbildmenge* $f^{-1}(D) \subseteq A \times A$ für $D = \{ y \in \mathbf{N} ;\, y \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar} \} \subseteq \mathbf{N}$.
d) Geben Sie speziell die Urbilder $f^{-1}(n) = f^{-1}(\{n\})$ für $n = 1, 4, 16, 27, 64, 81, 100$ nacheinander in aufzählender Mengenschreibweise an.

	8,0

__18. Aufgabe__ __(Übungsaufgabe)__*:*

Gegeben sind die beiden Abbildungen

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \text{ mit } f(x,y) := (x-1)\cdot(y+1) + 1 \text{ und } g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \text{ mit } g(u) := (u+1,\, 2\cdot u) .$$

a) Bestimmen Sie jeweils die folgenden Funktionswerte für die *zusammengesetzten Abbildungen* $h_1 := g \circ f$ und $h_2 := f \circ g$ auf direktem Wege:
(i) $h_1(3,4)$, (ii) $h_1(2,1)$, (iii) $h_2(6)$, (iv) $h_2(1)$.
b) Leiten Sie jeweils die Abbildungsvorschrift für die beiden *Kompositionen* $h_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ mit $h_1 := g \circ f$ und $h_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $h_2 := f \circ g$ her und testen Sie diese mithilfe der in Teil (a) ermittelten konkreten Funktionswerte.
c) Untersuchen Sie (mit Begründung) die Abbildung g auf *Injektivität* und die Abbildung f auf *Surjektivität*.

__19. Aufgabe__ __(Hausaufgabe)__*:*

Gegeben seien die beiden Abbildungen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ mit $f(x,y) = (2x-1)\cdot(y+2)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ und $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ mit $g(u) = (3u+6,\, u-2)$, $u \in \mathbf{R}$.

a) Bestimmen Sie direkt die folgenden Funktionswerte für die beiden *zusammengesetzten Abbildungen* $h_1 := g \circ f$ und $h_2 := f \circ g$:
(i) $h_1(1,-2)$, (ii) $h_1(3,1)$, (iii) $h_2(-3)$, (iv) $h_2(2)$

b) Leiten Sie jeweils die Abbildungsvorschrift für die beiden *Kompositionen* $h_1 : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ mit $h_1 := g \circ f$ und $h_2 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ mit $h_2 := f \circ g$ her und testen Sie diese mithilfe der in Teil (a) ermittelten konkreten Funktionswerte.

c) Untersuchen Sie (mit Begründung) die Abbildung g auf *Injektivität* und die Abbildung f auf *Surjektivität*.

	10,0