Freie Universität Berlin WiSe 2013/14
Fachbereich Mathematik 11.11.2013

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

3. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)"

(Abgabe der Hausaufgaben: *19.11.2013*)

12. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Ausgehend vom Zahlbereich $(\boldsymbol{N}, +, \cdot)$ wollen wir den Zahlbereich $\boldsymbol{Z}$ einführen. Ausgangspunkt ist die Frage nach der allgemeinen Lösbarkeit der Gleichung $(*)$ $b + x = a$ für $a,b \in \boldsymbol{N}$ beliebig. Dazu wird die Gleichung $(*)$ mit dem geordneten Paar $(a,b) \in \boldsymbol{N}^2 = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ "identifiziert". Weiterführend zu den Aufgabenteilen (a) und (b) aus der 12. Aufgabe auf dem 2. Übungsblatt zeigen wir:

c) Definiert man $\boldsymbol{Z}$ als die Menge $\boldsymbol{N}^2/\!\sim$ der Äquivalenzklassen und $\boldsymbol{0} := [1,1]$ sowie zu $\boldsymbol{x} = [a,b]$ die Zahl $-\boldsymbol{x} := [b,a]$, so bildet $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ einen *Integritätsring* mit $\boldsymbol{1} = [2,1]$ als *Einselement*, d.h. eine Menge, in der die Körperaxiome gelten mit Ausnahme der Existenz des multiplikativ inversen Elements, anstelle welcher die sogenannte *Nullteilerferfreiheit* tritt: (NF) $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z}: \ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \ \vee \ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

d) Durch die *injektive* Abbildung $\varphi : \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}^2/\!\sim$ mit $\varphi(n) = [n+1, 1]$, $n \in \boldsymbol{N}$ wird der „alte" Bereich $\boldsymbol{N}$ der natürlichen Zahlen strukturverträglich in den neuen Zahlbereich $\boldsymbol{Z}$ *eingebettet*. Dabei gilt: $\forall m,n \in \boldsymbol{N}: \ \varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n) \ \wedge \ \varphi(m\cdot n) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$.

e) Die Gleichung $(*)$ $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ist nun in $\boldsymbol{Z}$ für beliebige $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z}$ *eindeutig* lösbar. Die Lösung ist dann $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

13. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Ausgehend vom soeben eingeführten Integritätsbereich $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$ wollen wir nun analog wie in Aufgabe 12 den Zahlbereich $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen einführen. Ausgangspunkt ist die Frage nach der allgemeinen Lösbarkeit der Gleichung $(**)$ $b\cdot x = a$ für $a,b \in \boldsymbol{Z}$, $b \neq 0$ beliebig. Dazu wird die Gleichung $(**)$ mit dem geordneten Paar $(a,b) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^*$, $\boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{Z} - \{\boldsymbol{0}\}$ "identifiziert". Weiterführend zu den Hausaufgabenteilen (a) und (b) dieser Aufgabe auf dem 2. Übungsblatt ist weiter zu zeigen:

c) Definiert man $\boldsymbol{Q}$ als die Menge $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^*/\!\sim$ der Äquivalenzklassen und $\boldsymbol{0} := [0,1]$ sowie $\boldsymbol{1} := [1,1]$ und zu $\boldsymbol{x} = [a,b]$ die Zahl $-\boldsymbol{x} := [-a,b]$ und im Fall $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ die Zahl $\boldsymbol{x}^{-1} = [b,a]$, so bildet $(\boldsymbol{Q}, +, \cdot)$ einen Körper.

d) Durch die *injektive* Abbildung $\psi : \boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^*/\!\sim$ mit $\psi(a) = [a, 1]$, $a \in \boldsymbol{Z}$ wird der „alte" Bereich $\boldsymbol{Z}$ der ganzen Zahlen strukturverträglich in den neuen Zahlbereich $\boldsymbol{Q}$ eingebettet. Dabei gilt: $\forall m,n \in \boldsymbol{Z}: \ \varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n) \ \wedge \ \varphi(m\cdot n) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$.

e) Die Gleichung $(*)$ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ist nun in $\boldsymbol{Q}$ für beliebige $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Q}$ mit $\boldsymbol{b} \neq 0$ *eindeutig* lösbar. Die Lösung ist dann $\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^{-1}$.

	12,0

14. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Geben sei ein Körper $(K, +, \cdot)$. Weiterhin gebe es einen Teilbereich $P \subseteq K$, *Positivbereich* genannt, mit folgenden drei Eigenschaften:

(i) (*TRI*) $\forall\, a\in K$: entweder $a\in P$ oder $a=0$ oder $-a\in P$,

(ii) (*VA*) $\forall\, a,b\in K$: $a\in P \wedge b\in P \Rightarrow a+b\in P$,

(iii) (*VM*) $\forall\, a,b\in K$: $a\in P \wedge b\in P \Rightarrow a\cdot b\in P$.

a) Man beweise, dass durch $(*)$ $a<b \;:\Leftrightarrow\; b-a\in P$ ein *strenge lineare* (*konnexe*) *Ordnungsrelation* auf K definiert ist. Zeigen Sie weiterhin, dass dann durch

$(**)$ $a\le b \;:\Leftrightarrow\; a<b \vee a=b$ automatisch eine *Anordnung* auf K induziert wird.

b) Beweisen Sie unter Rückgriff auf die Definition $(*)$, dass folgende *Ungleichungsregeln* in $(K,<)$ gelten:

(i) $\forall\, a,b,c\in K$: $a<b \Rightarrow a+c<b+c$, (ii) $\forall\, a,b,c\in K$: $a<b \wedge 0<c \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$,

(iii) $\forall\, a,b,c\in K$: $a<b \wedge c<0 \Rightarrow b\cdot c<a\cdot c$, (iv) $\forall\, a,b,c\in K$: $0<a<b \Rightarrow b^{-1}<a^{-1}$,

(v) $\forall\, a\in K^* = K\setminus\{0\}$: $a^2>0$.

<u>15. Aufgabe</u> <u>(**Hausaufgabe**)</u>*<u>:</u>*

Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der Ungleichungsregeln aus Aufgabe 14 sowie dem Betrag für reelle Zahlen die Lösungsmengen $\boldsymbol{L}$ der folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie $\boldsymbol{L}$ als Teilmenge der jeweiligen betrachteten Grundmenge.

(a) $\boldsymbol{L} = \left\{ x\in\boldsymbol{R} : \dfrac{4x-3}{2x+1} \le \dfrac{2x+3}{x+2} \right\}$, (b) $\boldsymbol{L} = \left\{ (x,y)\in\boldsymbol{R}^2 : x>1 \wedge x+2y<4 \wedge y+3>x \right\}$,

(c) $\boldsymbol{L} = \left\{ x\in\boldsymbol{R} : |x-4|+|2-x| \le 2 \right\}$.

	10,0

<u>16. Aufgabe</u> <u>(**Übungsaufgabe**)</u>*<u>:</u>*

Sei H die Menge aller Menschen (homo sapiens) sowie F die Menge aller Frauen und $M = H\setminus F$ die Menge aller Männer. Betrachte dann die folgenden Abbildungen:

(i) $f: H\to H$, $f(x)$ ist (biologische) Mutter von $x\in H$,
(ii) $g: H\to H$, $g(x)$ ist (biologischer) Vater von $x\in H$,
(iii) $h: H\to F\times M$, $h(x)$ ist (biologisches) Elternpaar von $x\in H$.

Insbesondere gilt dann für jeden Menschen $x\in H$: $h(x) = (a,b) = (f(x), g(x))$.

a) Beschreiben Sie in Worten die zusammengesetzten Abbildungen (*Kompositionen*)

(i) $f^2 = f\circ f$, (ii) $f\circ g$, (iii) $g\circ f$ und (iv) $g^2 = g\circ g$. Gilt insbesondere $f\circ g = g\circ f$?

b) Geben Sie jeweils (mit Begründung) an, ob die Abbildungen f, g und h *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* sind.

c) Zu beliebigem $y\in H$ und $(a,b)\in F\times M$ gebe man die *Urbildmengen* $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$, $g^{-1}(y) = g^{-1}(\{y\})$ sowie $h^{-1}(a,b) = h^{-1}(\{(a,b)\})$ in beschreibender Form an. Welchen mengentheoretischen Zusammenhang besitzen diese drei Mengen?

<u>17. Aufgabe</u> <u>(**Hausaufgabe**)</u>*<u>:</u>*

Sei $A = \{1, 2, \dots, 6\}$ sowie $A\times A$ die Menge der möglichen „Augenpaare" beim Wurf mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln. Weiter sei die Abbildung $f: A\times A \to \boldsymbol{N}$ gegeben durch

$$f(a,b) = a^b \quad \text{für} \quad (a,b)\in A\times A \ ,$$

also $f(a,b)$ als der aus den Ergebnissen beider Würfel gebildeten Potenz.

a) Geben Sie explizit an: $f\,(3,1)$, $f\,(1,3)$ und $f\,(5,5)$.

b) Untersuchen Sie, ob f injektiv ist, und bestimmen Sie das Bild $f\,(A \times A)$ von f .

c) Bestimmen Sie (explizit) die *Bildmenge* $f\,(C) \subseteq \boldsymbol{N}$ für $C = \{\,(x,2);\, x \in A\} \subseteq A \times A$ sowie die *Urbildmenge* $f^{-1}(D) \subseteq A \times A$ für $D = \{\, y \in \boldsymbol{N}\,;\, y$ *ist durch 4 teilbar* $\} \subseteq \boldsymbol{N}$.

d) Geben Sie speziell die Urbilder $f^{-1}(n) = f^{-1}(\{n\})$ für $n = 1, 4, 16, 27, 64, 81, 100$ nacheinander in aufzählender Mengenschreibweise an.

	8,0