Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

WiSe 2013/14
28.01.2014

11. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)"

(Abgabe der Hausaufgaben: *04.02.2014*)

47. Aufgabe (**Übungsaufgabe**)*:*

Wir betrachten die Menge $K = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$ zusammen mit den Verknüpfungen

(A) $(a,b) + (c,d) := (a + c,\ b + d)$, (M) $(a,b) * (c,d) := (ac + 2bd,\ ad + bc)$

für $(a,b),(c,d) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$. Zeigen Sie unter Verwendung der Tatsache, dass $(K, +)$ bereits eine abelsche Gruppe ist:

a) $(K, +, *)$ ist ein Körper. Wie sieht insbesondere das neutrale Element der Multiplikaton und das zu $(a,b) \neq (0,0)$ inverse Element $(x,y) = (a,b)^{-1} \in K$ aus?

b) Durch $\varphi : \mathbf{Q} \to K$ mit $\varphi(a) = (a,0)$, $a \in \mathbf{Q}$ wird der „alte" Bereich $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen strukturverträglich in den neuen Zahlbereich $K = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ eingebettet. Das heißt:

(i) φ bildet $\mathbf{Q}$ bijektiv auf $\mathbf{Q} \times \{0\}$ ab,

(ii) $\forall a,b \in \mathbf{Q}$: $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \ \wedge\ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

c) Zeigen Sie: Die „Zahl" $\alpha := (0,1) \in K$ ist Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbf{Q}[x]$ mit rationalen Koeffizienten. Schreibt man zudem $\sqrt{2}$ für $\alpha = (0,1)$, so besitzt weiter jedes $x = (a,b) \in K$ eindeutig die Darstellung $x = a + b \cdot \sqrt{2}$. Man schreibt dann für K auch $\mathbf{Q}(\sqrt{2}\,)$ und sagt: „$\mathbf{Q}$ adjungiert Wurzel *2*".

48. Aufgabe (**Hausaufgabe**)*:*

Wir betrachten die Menge $K = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{R}\}$ zusammen mit den Verknüpfungen

(A) $(a,b) + (c,d) := (a + c,\ b + d)$, (M) $(a,b) * (c,d) := (ac - bd,\ ad + bc)$

für $(a,b),(c,d) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Zeigen Sie unter Verwendung der Tatsache, dass $(K, +)$ bereits eine abelsche Gruppe ist:

a) $(K, +, *)$ ist ein Körper. Wie sieht insbesondere das neutrale Element der Multiplikaton und das zu $(a,b) \neq (0,0)$ inverse Element $(x,y) = (a,b)^{-1} \in K$ aus?

b) Durch $\varphi : \mathbf{R} \to K$ mit $\varphi(a) = (a,0)$, $a \in \mathbf{R}$ wird der „alte" Bereich $\mathbf{R}$ der rationalen Zahlen strukturverträglich in den neuen Zahlbereich $K = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ eingebettet. Das heißt:

(i) φ bildet $\mathbf{R}$ bijektiv auf $\mathbf{R} \times \{0\}$ ab,

(ii) $\forall a,b \in \mathbf{R}$: $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \ \wedge\ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

c) Zeigen Sie: Die „Zahl" $i := (0,1) \in K$ ist Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbf{R}[x]$ mit reellen Koeffizienten. Weiterhin besitzt jedes $z = (a,b) \in K$ dann eindeutig die Darstellung $z = a + i \cdot b$. Man schreibt dann für K auch $\mathbf{C}$ und nennt $\mathbf{C}$ den Körper der *komplexen Zahlen*.

10,0	

49. Aufgabe:

Bestimmen Sie für folgende komplexen Zahlen $z \in \boldsymbol{C}$ die kartesische Darstellung $z = a + ib$, die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - ib$ sowie den Betrag $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$:

Ü (i) $z = \dfrac{2i}{1+i}$, (ii) $z = \dfrac{10-5i}{1+2i}$, (iii) $z = \sum_{k=0}^{26} i^k$,

H (iv) $z = (1-i)^{25}$, (v) $z = \dfrac{5}{(1-i)\cdot(2-i)\cdot(3-i)}$.

10,0	

50. Aufgabe:

Bestimmen Sie zu der jeweils angegebenen reellen Zahl $\alpha \in \boldsymbol{R}$ zunächst ein ganzzahliges Polynom $f(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$ von kleinstmöglichem Grad mit $f(\alpha) = 0$. Weisen Sie dann nach, dass die Nullstelle $\alpha \in \boldsymbol{R}$ des gefundenen ganzzahligen Polynoms $f(x)$ eine *irrationale* Zahl ist, indem sie $f(x)$ nach möglichen rationalen Nullstellen untersuchen.

Ü (a) $\alpha = \sqrt[4]{5 - \sqrt{6}}$, **Ü** (b) $\alpha = \sqrt{7} - \sqrt{3}$, **H** (c) $\alpha = \sqrt[3]{11} - \sqrt{2}$.

10,0	