Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

WiSe 2013/14
20.01.2014

StR.i.H. Albrecht Gündel-vom Hofe

10. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

(Abgabe der Hausaufgaben: *28.01.2014*)

42. Aufgabe (**Übungsaufgabe**):

Man beweise mittels vollständiger Induktion über $n \in \boldsymbol{N}_0$:

Für jede n-elementige Menge M – d.h. $card\,(M) = n$ – ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen $A \subseteq M$ für $k \in \boldsymbol{N}_0$ beliebig gegeben durch $\binom{n}{k}$.

Tipp: Man beachte, dass der Fall $k > n$ mit eingeschlossen ist, und behandle den Fall $k = 0$ extra. Im Induktionsschritt mache man Gebrauch von der in Aufgabe 40 **H** (b) bewiesene Eigenschaft der Binomialkoeffizienten.

43. Aufgabe (**Hausaufgabe**):

Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \in \boldsymbol{N}$:

Die Anzahl an injektiven Abbildungen $f : A \to B$ von einer n-elementigen Menge A in eine m-elementige Menge B mit $m \geq n$ ist gegeben durch $n! \cdot \binom{m}{n}$.

8,0	

44. Aufgabe:

Für $n \in \boldsymbol{N}_0$ beliebig sei das Polynom $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ gegeben durch die folgende Rekursionsvorschrift für die Koeffizienten a_k :

Ü (i) $a_0 = 1$, $a_{k+1} = \frac{k+1}{k+2} \cdot a_k \quad (k = 0,1,\ldots,n)$,

H (ii) $a_0 = 1$, $a_{k+1} = \left(1 - \frac{k}{k+2}\right) \cdot a_k \quad (k = 0,1,\ldots,n)$.

a) Bestimmen Sie konkret die Koeffizienten für das Polynom f_5 und ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des Hornerschemas die Funktionswerte $f_5(x)$ an den Stellen $x = m$ für $m = 0,1,2,3,4,5$ und skizzieren Sie – evtl. unter Zuhilfenahme eines Plotters – die Funktion in dem Intervall $[-10,10] \subseteq \boldsymbol{R}$.

b) Leiten Sie für die Koeffizienten a_k eine geschlossene Darstellung (Folgenvorschrift) her und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion über $k \in \boldsymbol{N}$.

10,0	

<u>*45. Aufgabe* (**Übungsaufgabe**)*:*</u>

a) Mittels vollständiger Induktion beweise man, dass für das Polynom $f_n(x) = (1+x)^n$ gilt:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \ .$$

b) Leiten Sie mithilfe von (a) eine konkrete Formel für den Ausdruck $(a+b)^n$ sowie für $(a-b)^n$ und $n \in \boldsymbol{N}_0$ her (allgemeine Binomische Formel = Binomischer Lehrsatz).

c) Bestimmen Sie einmal explizit das Polynom $f(x) = (1+x^2) \cdot (1-2x)^5$.

<u>*46. Aufgabe* (**Hausaufgabe**)*:*</u>

a) Leiten Sie für das Polynom $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \ldots + x^n$ $(x \in \boldsymbol{R})$ eine summenfreie Darstellung her und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion über $n \in \boldsymbol{N}_0$. (Es handelt sich um die *geometrische Summenformel*.)

b) Mithilfe von (a) leite man eine konkrete Formel für den Ausdruck $a^n - b^n$ her (allgemeine 3. Binomische Formel).

c) Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \boldsymbol{N}_0$ ein $N \in \boldsymbol{N}_0$ gibt, so dass gilt: $\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) = f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k$. Wie groß muss N gewählt werden?

d) Untersuchen Sie unter Rückgriff auf (a) das allgemeine Polynom $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ sowie im Speziellen das Polynom $p(x) = 1 - 2x^2 + 4x^4 - 8x^6 + 16x^8 - 32x^{10}$ auf reelle Nullstellen.

<u>*Tipps zu*</u> (a): Man betrachte einmal $(1-x) \cdot f_n(x)$ für $x \neq 0$.

(c): Beachte Aufgabe 38(b).

(d): Man untersuche dieFälle n gerade und n ungerade.

12,0	