Technische Universität Berlin
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

WS 2013/14
24.10.2013

StRiH. A. Gündel-vom Hofe

Ergänzungsskript zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

Im Folgenden bringen wir einen Überblick über die (*reellen* bzw. *komplexen*) *Polynome* und *rationalen Funktionen*.

Definition 1:

Eine Funktion $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ heißt *Polynom*(*funktion*), wenn es eine (reelle) Folge (a_n) gibt mit der Eigenschaft, dass $a_n = 0$ für *fast alle* $n \in \boldsymbol{N}_0$ gilt, und wenn:

$$(*) \qquad \boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots} \quad \text{für alle } x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Bemerkungen:

- Man beachte, dass in $(*)$ *nur „formal“* eine *unendliche* Anzahl von Summanden addiert wird. Aufgrund unserer Voraussetzung an die Folge (a_n) ist ja entweder $f \equiv 0$, oder es existiert andererseits
$$\boxed{n := max\left\{ i \in \boldsymbol{N}_0 : a_i \neq 0 \right\} \geq 0}\,.$$
- Insbesondere ist dann $a_n \neq 0$, und man nennt $(a_0, \ldots, a_n)$ ein *Koeffizientensystem* der (minimalen) Länge n für f. Die ganze Zahl n selbst bezeichnet man als den *Grad von* f und schreibt dafür: $grad\,(f) = n$.
- Im Fall $f \equiv 0$ ist durch (0) ein minimales Koeffizientensystem gegeben, und man setzt per Definition: $grad\,(0) = -\infty$.
- Offensichtlich gilt dann: $grad\,(f) = 0 \;\Leftrightarrow\; f \equiv c$ mit $c \neq 0$ (also: f konstant $\neq 0$).
- Für $grad\,(f) = n \geq 0$ erhält man in $(*)$: $\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}$.

Seien $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot x^i$ zwei beliebige Polynome und $c \in \boldsymbol{R}$ beliebig.

Dann sind folgende Operationen definiert:

- $(f+g)(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i + b_i \right) \cdot x^i$ mit $grad\,(f+g) \leq max\,(grad\,(f), grad\,(g))$
- $(c \cdot f)(x) := c \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(c\, a_i \right) \cdot x^i$ mit $grad\,(c \cdot f) = grad\,(f)$ für $c \neq 0$.
- $(f \cdot g)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k$, wobei $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}$ $(k \in \boldsymbol{N}_0)$ die neuen Koeffizienten sind,

  mit $grad\,(f \cdot g) = grad\,(f) + grad\,(g)$, falls f und g beide nicht das Nullpolynom sind.

<u>Bemerkungen</u>:

- Man kann in Analogie zu reellen Polynomen auch *komplexe Polynomfunktionen* $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ einführen, indem man *komplexe* Folgen (c_n) mit $c_n \in \boldsymbol{C}$ betrachtet mit der Eigenschaft, dass $c_n = 0$ für *fast alle* $n \in \boldsymbol{N}_0$ ist, und wenn man für $z \in \boldsymbol{C}$ setzt:

  $$(*) \qquad \boxed{f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot z^i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots} \ .$$

  Dann definiert man wie im Reellen den Grad von f durch:

  $$\boxed{grad\ f = n := max \left\{ i \in \boldsymbol{N}_0 : a_i \neq 0 \right\} \geq 0} \text{ für } f \not\equiv 0 \text{ bzw. } \boxed{grad\ 0 := -\infty} \text{ für } f \equiv 0 \ .$$

  Ebenso bildet dann $(c_0, \ldots, c_n)$ ein (komplexes) *Koeffizientensystem* der (minimalen) Länge n für f. Auch übertragen sich die Rechenoperationen zwischen Polynomen mit reellen Koeffizienten auf solche mit komplexen Koeffizienten.

- Die Koeffizienten $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}$ aus dem Produkt $f \cdot g$ zweier Polynome $f \not\equiv 0$ und $g \not\equiv 0$ lassen sich gut anhand des folgenden *Diagonalschemas* erklären:

  Schreibt man alle möglichen Produkte $a_i \cdot b_j$ $(i,j \in \boldsymbol{N}_0)$ in Form einer Tabelle auf, so ergeben sich die Koeffizienten c_k des Produktpolynoms als Summen der jeweils in der (von links unten nach rechts oben verlaufenden) Diagonale stehenden Elemente. Beachten Sie dabei, dass die Spalten unter a_i für $i \geq grad\,(f) + 1$ und die Zeilen rechts von b_j für $j \geq grad\,(g) + 1$ aus lauter Nullen bestehen.

	c_0		c_1					c_5
	$\boldsymbol{a_0}$ +	$\boldsymbol{a_1}$ +	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_5}$ +	…	
$\boldsymbol{b_0}$	$\boldsymbol{a_0\ b_0}$	$\boldsymbol{a_1\ b_0}$	$\boldsymbol{a_2\ b_0}$	$\boldsymbol{a_3\ b_0}$	$\boldsymbol{a_4\ b_0}$	$\boldsymbol{a_5\ b_0}$	…	
$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{a_0\ b_1}$	$\boldsymbol{a_1\ b_1}$	$\boldsymbol{a_2\ b_1}$	$\boldsymbol{a_3\ b_1}$	$\boldsymbol{a_4\ b_1}$	$\boldsymbol{a_5\ b_1}$	…	
$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{a_0\ b_2}$	$\boldsymbol{a_1\ b_2}$	$\boldsymbol{a_2\ b_2}$	$\boldsymbol{a_3\ b_2}$	$\boldsymbol{a_4\ b_2}$	$\boldsymbol{a_5\ b_2}$	…	
$\boldsymbol{b_3}$	$\boldsymbol{a_0\ b_3}$	$\boldsymbol{a_1\ b_3}$	$\boldsymbol{a_2\ b_3}$	$\boldsymbol{a_3\ b_3}$	$\boldsymbol{a_4\ b_3}$	$\boldsymbol{a_5\ b_3}$	…	
$\boldsymbol{b_4}$	$\boldsymbol{a_0\ b_4}$	$\boldsymbol{a_1\ b_4}$	$\boldsymbol{a_2\ b_4}$	$\boldsymbol{a_3\ b_4}$	$\boldsymbol{a_4\ b_4}$	$\boldsymbol{a_5\ b_4}$	…	
$\boldsymbol{b_5}$	$\boldsymbol{a_0\ b_5}$	$\boldsymbol{a_1\ b_5}$	$\boldsymbol{a_2\ b_5}$	$\boldsymbol{a_3\ b_5}$	$\boldsymbol{a_4\ b_5}$	$\boldsymbol{a_5\ b_5}$	…	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		

Wesentlich im sogenannten *Polynomringen* $\boldsymbol{R}[x]$ und $\boldsymbol{C}[z]$ ist die Möglichkeit der *Polynomdivision*, welche Inhalt des folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatzes ist.

<u>Satz 1</u> (*Division mit Rest für Polynome*) [*1.6.4.* im Fritzsche]
Sei $g \not\equiv 0$ ein (reelles oder komplexes) Polynom. Dann existieren zu jedem weiteren Polynom f eindeutig zwei Polynome q und r, so dass gilt:

(1) $f = q \cdot g + r$ und (2) $r \equiv 0$ oder $grad\,(r) < grad\,(g)$.

<u>Beweis</u>*:* (siehe auch *Tutorium* bzw. das Buch von *Fritzsche*)

(i) *Eindeutigkeit der Darstellung:*

Sei $f = q_1 \cdot g + r_1 = q_2 \cdot g + r_2$. Dann folgt: $\left(q_1 - q_2\right) \cdot g = r_2 - r_1$. Angenommen, es wäre $r_1 \neq r_2$, dann wäre $q_1 - q_2 \not\equiv 0$. Aus der Gradformel für das Produkt und die Summe von Polynomen ergäbe sich dann:

$$grad\left(r_2 - r_1\right) = grad\left[\left(q_1 - q_2\right) \cdot g\right] = grad\left(q_1 - q_2\right) + grad\,(g) \geq grad\,(g)$$

im Widerspruch zu $grad\left(r_2 - r_1\right) \leq max\,(grad\,(r_1)\,,\,grad\,(r_2)) < grad\,(g)$.

Also ist $r_1 = r_2$ und damit (wegen $g \not\equiv 0$) auch $q_1 = q_2$.

(ii) *Existenz der Darstellung:*

Ist $grad\,(f) < grad\,(g)$ - einschließlich $f \equiv 0$ -, so setzen wir $q := 0$ und $r := f$.

Sei nun $n = grad\,(f) \geq m = grad\,(g)$ und $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot x^i$ $(x \in \boldsymbol{R})$.

Wir zeigen nun die Existenz von q und r mittels erweiterter Induktion über $k := n - m$.

(I.A.) $k = 0$: Dann ist $m = n$, und man wähle $q \equiv \frac{a_n}{b_n}$ sowie $r = f - q \cdot g$ mit

$$r(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i - \frac{a_n}{b_n} \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot x^i \quad \text{mit} \quad c_i = a_i - \frac{a_n}{b_n} \cdot b_i \quad (i = 0, \ldots, n-1)\ .$$

(I.S.) $0, \ldots, k-1 \to k$:

Für jedes Polynom h mit $grad\,(h) = m + \mu$, $0 \leq \mu \leq k-1$ existiere nach (I.V.) eine Darstellung $h = q \cdot g + r$ mit $r \equiv 0$ oder $grad\,(r) < m$.

Ist $f(x) = \sum_{i=0}^{m+k} a_i \cdot x^i$ dann ein beliebiges Polynom mit $a_{m+k} \neq 0$, so betrachte man das Polynom $q_1(x) := \frac{a_{m+k}}{b_m} \cdot x^k$. Für $h := f - q_1 \cdot g$ gilt dann:

$$h(x) := \sum_{i=0}^{m+k} a_i \cdot x^i - \frac{a_{m+k}}{b_m} \cdot x^k \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{m+k-1} c_i \cdot x^i \quad \text{mit} \quad grad\,(h) \leq m + k - 1 \quad \text{bzw.}$$

$h \equiv 0$. Nach (I.V.) existieren dann Polynome q_2 und r , $grad\,(r) < grad\,(g)$ oder $r \equiv 0$ mit $h = q_2 \cdot g + r$. Dann folgt für f : $f = q_1 \cdot g + h = \left(q_1 + q_2\right) \cdot g + r$, wobei $grad\,(r) < grad\,(g) < grad\,(f)$ oder $r \equiv 0$. □

Zur Berechnung einzelner Funktionswerte von Polynomen eignet sich insbesondere das folgende Schema.

Das Hornerschema	
Umklammern des Ausdrucks:	Für gegebene Zahlen $a_k \in \boldsymbol{R}$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$ und $grad\,(f) = n$ gilt: $f(x) = a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x_0 + a_0 =$

	$(\ldots((a_n \cdot x_0 + a_{n-1}) \cdot x_0 + a_{n-2}) \cdot x_0 \ldots + a_1) \cdot x_0 + a_0$
Algorithmische Form:	Setze: $c_n = a_n$; $c_{n-k} = c_{n+1-k}\, x_0 + a_{n-k}$ für $k = 1,\ldots,n$. Dann ist $\boldsymbol{c_0}$ der Funktionswert $f(x_0)$.
Schema:	$\begin{array}{lcccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \text{Produkte:} & 0 & c_n \cdot x_0 & c_{n-1} \cdot x_0 & \ldots c_2 \cdot x_0 & & c_1 \cdot x_0 \\ \text{Summen:} & c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_1 & \boldsymbol{c_0} \end{array}$ Man füllt hierbei die beiden unteren Zeilen sukzessive *spaltenweise von links nach rechts* aus. *Rechts unten* steht $\boldsymbol{c_0}$.

<u>Bemerkungen</u>:

- Das Hornerschema zur Berechnung der Funktionswerte $f(x)$ kommt mit maximal *2n Rechenoperationen* aus, nämlich n *Multiplikationen* und n *Additionen*. Damit ist dieser Algorithmus für die Implementierung auf einem Computer sehr geeignet, auch wenn es heute schnellere (und effektivere) Algorithmen zur Funktionswerteberechnung gibt.

  im Hornerschema ist die *Polynomdivision* von $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ durch einen *linearen Term* $g(x) = x - x_0$ quasi „automatisch“ mit enthalten. Setzt man nämlich $q(x) = c_n \cdot x^{n-1} + c_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + c_2 \cdot x + c_1$ und $r(x) \equiv c_0$, so erhält man

  $$f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r(x) \ .$$

  Ist $x = x_0$ speziell eine *Nullstelle* von f - gilt also $f(x_0) = 0$ -, so erhält man $r \equiv 0$.

  <u>Beweis</u>:

  Mit $q(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot x^{k-1}$ und $r \equiv c_0$ erhält man:

  $$\begin{aligned}(x - x_0) \cdot q(x) + r(x) &= (x - x_0) \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot x^{k-1} + c_0 = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} \cdot x_0 \cdot x^k \\ &= c_n \cdot x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(c_k - c_{k+1} \cdot x_0 \right) \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = f(x) \ .\end{aligned}$$

  Dabei haben wir $c_n = a_n$ sowie $c_k = c_{k+1}\, x_0 + a_k$ für $k = 0,\ldots,n-1$ verwendet. □

Aus der Polynomdivision (*Satz 1*) folgt der folgende von Descartes stammende Satz:

<u>*Satz 2*</u> (*Abspaltung von Linearfaktoren*) [*1.6.1.* im Fritzsche]

Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *ein* (*reelles oder komplexes*) *Polynom mit* $f \not\equiv c$.

Dann gibt es ein Polynom $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$ *mit* $b_{n-1} = a_n$ *, so dass gilt:*

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathbf{R} \text{ (bzw. } x \in \mathbf{C}\text{)} \ .$$

<u>*Beweis*</u>: (siehe auch *Tutorium*)

Nach Satz 1 existieren zu $h(x) = x - x_0$ zwei eindeutige Polynome q und r mit $r \equiv 0$ oder $grad\,(r) < grad\,(h)$ und $f = h \cdot q + r$.

Wegen $grad\,(h) = 1$ folgt dann $r \equiv c$ mit $c \in \boldsymbol{R}$ bzw. $c \in \boldsymbol{C}$, also $f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + c$.

Für $x = x_0$ erhält man dadurch speziell: $0 = f(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot q(x_0) + c = c$.

Also hat man $f(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$. Setzt man nun $g := q$, so folgt mit der Gradformel:

$$grad\,(g) = grad\,(f) - grad\,(h) = n - 1 .$$ □

Als Folgerung aus dem Satz von Descartes erhält man

<u>Satz 3</u> (*Identitätssatz für Polynome*) [*1.6.2.* und *1.6.3.* im Fritzsche]

Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *ein reelles Polynom. Besitzt* f *mehr als* n *Nullstellen, dann ist* $f \equiv 0$.

<u>*Beweis:*</u>

Wir zeigen zunächst, dass f im Fall $a_n \neq 0$ höchstens $n = grad\,(f)$ verschiedene Nullstellen besitzt. Wir führen dazu einen Induktionsbeweis über $n = grad\,(f)$.

(I.A.) $n = 0$: Dann ist $f \equiv a_0 \neq 0$, besitzt also überhaupt keine Nullstelle.

(I.S.) $n \to n+1$:

Nach der (I.V.) besitze jedes Polynom g mit $grad\,(g) = n$ höchstens n verschiedene Nullstellen. Dann folgt für ein Polynom f mit $grad\,(f) = n+1$:

(i) Entweder besitzt f gar *keine* Nullstelle in $\boldsymbol{R}$, und wir sind fertig,

(ii) oder es ist $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \boldsymbol{R}$. In diesem Fall existiert dann nach Satz 2 ein Polynom g mit $grad\,(g) = n$ und $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ für alle $x \in \boldsymbol{R}$.
Nach (I.V.) besitzt aber g höchstens n verschiedene Nullstellen, unter denen sich die Nullstelle x_0 von f befinden kann oder nicht. Auf jeden Fall hat dann aber f selbst höchstens $n+1$ verschiedene Nullstellen.

Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen. Insbesondere folgt jetzt:
Ist nun $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ein Polynom mit mindestens $n+1$ verschiedenen Nullstellen, ist f das Nullpolynom. □

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Damit besitzt jedes Polynom ein *eindeutiges Koeffizientensystem* minimaler Länge, denn ist $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot x^i$, dann besitzt $f(x) - f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i - b_i \right) \cdot x^i \equiv 0$ unendlich viele Nullstellen, woraus folgt: $a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow a_i = b_i$ für alle $i \in \boldsymbol{N}_0$.
- Stimmen zwei Polynome $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ und $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i$ mit $a_n = b_n = 1$ in n verschiedenen Stellen $x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{R}$ überein, so gilt $a_i = b_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Denn für das Differenzpolynom $h = f - g$ gilt dann:

$h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i - b_i \right) \cdot x^i$, also $grad(h) \le n-1$, sowie $h(x_i) = f(x_i) - g(x_i) = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Daher ist h nach Satz 3 das Nullpolynom und somit $f = g$.

Wir definieren nun die Ordnung einer Nullstelle:

<u>*Definition 2*</u>*:*

Sei f ein Polynom und $x_0, \in \mathbf{R}$ eine reelle Nullstelle. Man nennt x_0, eine *Nullstelle der Ordnung* k ($k \in \mathbf{N}$) , wenn ein Polynom g existiert, so dass

$$\boxed{f(x) = \left(x - x_0 \right)^k \cdot g(x)} \quad \text{mit } g(x_0) \ne 0 \text{ .}$$

Die Zahl k wird auch die *Vielfachheit* der Nullstelle x_0 von f genannt.

<u>*Bemerkungen*</u>*:*

- Man erhält das Polynom $g(x)$ infolge fortgesetzter Polynomdivision durch den Linearfaktor $(x - x_0)$. Dabei führt man die Polynomdivision so lange durch, wie x_0 immer noch Nullstelle des zu $(x - x_0)$ gehörenden „Komplementärteilers“ ist.
- Theoretisch (aber nicht gerade sehr sinnig) ließe sich jede relle (oder komplexe) Zahl x_0 mit $f(x_0) \ne 0$ auch als Nullstelle der Vielfachheit oder Ordnung $k = 0$ von f bezeichnen.

Die Antwort auf die Frage nach der „Existenz“ von Nullstellen reeller bzw. komplexer Polynome gibt der folgende zentrale Satz über komplexe Polynome, der historisch das erste Mal von Gauß bewiesen wurde und den wir hier ohne Beweis zitieren wollen:

<u>*Satz 4*</u> (*Fundamentalsatz der Algebra*) [*1.6.9.* im Fritzsche]

1. *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt in* $\mathbf{C}$ *mindestens eine Nullstelle.*
2. *Ist* $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ *mit* $grad(f) = n > 0$ (*also* f *nicht konstant*), *dann besitzt* f *in* $\mathbf{C}$ *genau* n *Nullstellen* (*mit Vielfachheit gezählt*).
   Sind hierbei $c_1, \dots, c_m$ *die verschiedenen Nullstellen mit Vielfachheiten* $k_1, \dots, k_m$ *, so ist*
   $$f(z) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(z - c_i \right)^{k_i} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n \text{ .}$$

<u>*Beweis*</u>*:*

Teil (1) können wir in diesem Zusammenhang noch nicht beweisen.

Teil (2) folgt jedoch durch fortgesetzte Anwendung von Satz 2 sowie Teil (1) des Fundamentalsatzes auf das aus der Division durch $(z - c_i)$ resultierende Polynom $g(z)$, bis man am Ende auf ein konstantes Polynom $g(z) \equiv c$ ($c \in \mathbf{C}$) stößt.

Die Eindeutigkeit des Koeffizientensystems minimaler Länge für ein Polynom (siehe auch Bemerkungen zu Satz 3) liefert dann: $c = a_n$. □

Im Hinblick auf die komplexen Nullstellen eines *reellen* Polynoms gilt der folgende Satz

<u>Satz 5</u> (*Die komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms*) [*1.6.6.* im Fritzsche]

Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *ein reelles Polynom mit* $grad\,(f) = n > 0$ (*d.h.* f *nicht konstant*). *Dann gilt:*

1. *Ist* $\alpha \in \boldsymbol{C}$ *eine Nullstelle von* f *, dann auch* $\overline{\alpha}$ *.*
2. *Die Anzahl der nicht-reellen Nullstellen von* f (*mit Vielfachheit gezählt*) *ist gerade. Insbesondere besitzt jedes reelle Polynom mit ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle.*
3. *Ist* $grad\,(f) = 2$ *, so lassen sich die Nullstellen* $x_{1,2}$ *von* f *explizit angeben. Insbesondere gilt nach Vieta:* $f(x) = a x^2 + b x + c$ *mit* $a \neq 0 \;\Rightarrow\;$ (*i*) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ *,* (*ii*) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ *.*

<u>Beweis</u>*:*

Zu (1) :

Ist $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ mit $a_i \in \boldsymbol{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$, so folgt für ein beliebiges $z \in \boldsymbol{C}$:

$$\overline{f(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \cdot \overline{z} + \ldots + \overline{a}_n \cdot \overline{z}^n = a_0 + a_1 \overline{z} + \ldots + a_n \overline{z}^n = f(\overline{z}) \quad .$$

Dabei wurde verwendet: $a_k \in \boldsymbol{R} \;\Leftrightarrow\; Im\,(a_k) = \dfrac{a_k - \overline{a}_k}{2i} = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{a}_k = a_k \quad (k = 1,\ldots,n)$.

Ist nun $\alpha \in \boldsymbol{C}$ eine komplexe Nullstelle von f , so folgt: $f(\overline{\alpha}) = \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0$.

Somit ist mit $\alpha \in \boldsymbol{C}$ auch $\overline{\alpha} \in \boldsymbol{C}$ eine Nullstelle von f . D.h.: Nicht-reelle Nullstellen eines reellen Polynoms f tauchen stets in *konjugiert komplexen Pärchen* auf.

Zu (2) :

Sei $grad\,(f) = n$ eine ungerade natürliche Zahl.

Zunächst existieren (unter Berücksichtigung der Ordnung) genau n Nullstellen $\alpha_k \in \boldsymbol{C}$ $(k = 1,\ldots,n)$. Weiterhin treten die nicht-reellen Nullstellen von f aufgrund von (*1*) in gerader Anzahl auf.

Damit bleibt ein Rest - genauer eine ungerade Anzahl - an reellen Nullstellen übrig.

Zu (3) :

Sei $f(x) = a x^2 + b x + c$ mit $a,b,c \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$. Dann erhalten wir mit quadratischer Ergänzung:

$$f(x) = a x^2 + b x + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$ mit der *Diskriminante* $\Delta = b^2 - 4ac \in \boldsymbol{R}$. Dabei gilt:

(i) $\Delta > 0$: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Also haben wir in diesem Fall zwei reelle Nullstellen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \in \boldsymbol{R} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \in \boldsymbol{R} \;.$$

(ii) $\Delta = 0$: In diesem Fall besitzt f die reelle Nullstelle $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$ der Ordnung 2 .

(iii) $\Delta < 0$: Jetzt hat f zwei konjugiert komplexe Nullstellen $x_1 = \dfrac{-b + i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ und

$$x_2 = \frac{-b - i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a} = \bar{x}_1 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} .$$

In allen drei Fällen erhält man (Nachrechnen): $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ und $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

Das sind die *Gleichungen von Vieta*. □

<u>Folgerung</u> [*1.6.11.* im Fritzsche]

Jedes nicht konstante reelle Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *zerfällt über* $\mathbf{R}$ *vollständig in reelle Linearfaktoren und quadratische Polynome ohne reelle Nullstellen.*

<u>*Beweis:*</u>

Zunächst gilt aufgrund von Satz 4: $f(z) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(z - c_i \right)^{k_i}$ mit $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$.

Dann lassen sich nach Satz 5 die nicht-reellen Nullstellen jeweils zu konjugiert komplexen Pärchen $(c, \bar{c})$ zusammenfassen. Für die zugehörigen Linearfaktoren gilt dann:

$$p(x) = (x - c)\cdot(x - \bar{c}) = x^2 - (c + \bar{c})\cdot x + c\cdot\bar{c} = x^2 - 2\,Re(c)\cdot x + |c|^2 = x^2 + a\cdot x + b$$

mit $a = -2\,Re(c) \in \mathbf{R}$ und $b = |c|^2 \in \mathbf{R}$. □

Wir schließen den Exkurs über Polynome ab mit einer Beschreibung aller möglichen rationalen Nullstellen eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten.

<u>Satz 6</u> (*Rationale Nullstellen von Polynomen*) [*1.6.14.* im Fritzsche]

Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *ein Polynom mit* $grad(f) = n$ *und* $a_k \in \mathbf{Z}$ *für* $k = 0, \ldots, n$ *.*

Ist dann $\alpha = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ *,* p *und* q *teilerfremd, eine rationale Nullstelle von* f *, so muss gelten:*

(*i*) p *teilt* a_0 *und* (*ii*) q *teilt* a_n (*in Zeichen:* $p \mid a_0$ *und* $q \mid a_n$) *.*

<u>*Beweis:*</u>

Ist $f(\alpha) = 0$, $\alpha = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ mit $ggT(p, q) = 1$, so gilt zunächst:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \ldots + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 \cdot q^n + a_1 p \cdot q^{n-1} + \ldots + a_n \cdot p^n = 0 \quad .$$

Dann folgt: $a_0 \cdot q^n = p \cdot r$ mit $r = -\left(a_1 \cdot q^{n-1} + a_2 \cdot p \cdot q^{n-2} + \ldots + a_n \cdot p^{n-1} \right) \in \mathbf{Z}$. Das heißt aber: p teilt $a_0 \cdot q^n$, und da p und q teilerfremd sind, muss gelten: $p \mid a_0$.

Analog: $a_n \cdot p^n = q \cdot s$ mit $s = -\left(a_0 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \right) \in \mathbf{Z}$. Das heißt aber: q teilt $a_n \cdot p^n$, und da p und q teilerfremd sind, folgt: $q \mid a_n$. □