FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)
Übungsaufgaben – Zettel 7

Aufgabe 28

Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestehe aus einem nach unten geöffneten Parabelbogen mit Scheitelpunkt $S = (-1; 4)$, welche im Punkt $P = (1; 2)$ in eine Gerade übergeht, welche durch den weiteren Punkt $Q = (3; -1)$ verläuft.
a) Stellen Sie die explizite Abbildungssvorschrift $y = f(x)$ für die Funktion auf und skizzieren Sie ihren Graphen.
Lösung. Die Funktion f besteht aus 2 Teile, die müssen getrennt bestimmen werden.
1. Parabelbogen. Eine quadratische Funktion kann in der Form

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0 \tag{1}$$

dargestellt werden, mit:

- (x_0, y_0): Scheitelpunkt,
- a: öffnungsparameter.

Für $f(x)$ haben wir

$$x_0 = -1,\ y_0 = 4\,.$$

Zunächst, um a zu bestimmen, benutzen wir die Bedienung dass $f(x)$ durch $P = (1; 2)$ läuft. Also:

$$f(1) = 2 \Rightarrow 2 = a(1 - \underbrace{(-1)}_{x_0})^2 + \underbrace{4}_{y_0} \Rightarrow 2 = 4a + 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}\,.$$

Der Abbildungvorschrift des Parabolbogen ist dann:

$$y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 4$$

bis $x = 1$, wo die Parabelbogen in eine Gerade übergeht.
2. Gerade. Um diese zweite Teil zu bestimmen, nutzen wir die Zweipunkteform einer Gerade:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

mit $(x_0, y_0) = (1, 2)$ und $(x_1, y_1) = (3, -1)$. Also:

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{-1 - 2}{3 - 1} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}(x - 1) + 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}\,.$$

Dann ist f durch

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 4 & x \leq 1 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} & x > 1 \end{cases}$$

definiert Um den Graph von $f(x)$ zu skizzieren, mahlen wir dann zu erst ein

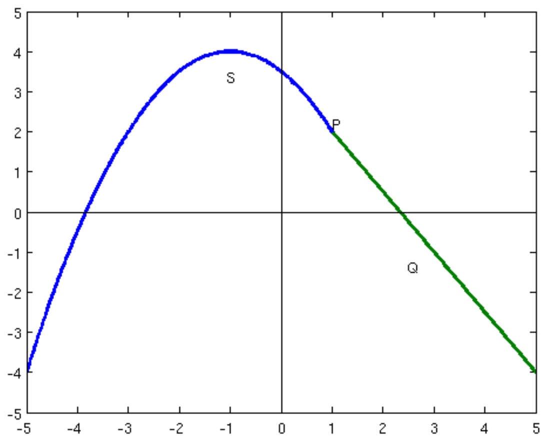

Figure 1: Due Funktion $f(x)$

Parabelbogen mit Scheitelpunkt S, nur bis $x = 1$. Von da, geht $f(x)$ weiter wie eine Gerade (Bild 1).

b) Skizzieren Sie zusätzlich die Graphen der folgenden Funktionen g und h und beschreiben Sie, wie diese Graphen geometrisch aus dem Ausgangsgraphen von f resultieren:

$$\text{(i)}\, g(x) = -f(2x-3), \;\; \text{(ii)}\, h(x) = 3f(-x) + 2$$

Lösung. Die Funktionen g und h bestehen aus Kompositionen von f mit *affinen* Funktionen.
!!Achtung: sehr wichtig sind (i) die Rheinfolge, (ii) ob die affine Funktionen *innere* oder *außere* in der Komposition sind!!

(i) Für $g(x)$, definieren wir folgende Funktionen:

$$\phi_1(x) = 2x, \;\; \phi_2(x) = x + 3, \;\; \phi_3(x) = -x\,.$$

Dann gilt:

$$g(x) = \phi_3\left(\, f(\phi_2(\phi_1(x)))\,\right)\,.$$

Also wird g, aus dem Graph von f, skizziert durch:

- eine Stauchung: $x \to 2x$
- eine Verschiebung in x-Richtung (+3 nach Rechts): $2x \to 2x - 3$
- eine Spiegelung an der x-Achse: $f(2x-3) \to -f(2x-3)$

Also:
(i) Für $h(x)$ definieren wir

$$\phi_1(x) = -x,\ \phi_2(x) = 3x,\ \phi_3(x) = x + 2\,.$$

Dann gilt:

$$h(x) = \phi_3\left(\,\phi_2(f(\phi_1(x)))\,\right)\,.$$

D.h. dass der Graph von h durch

- eine Spiegelung an der y-Achse: $x \to -x$
- eine Strechung $f(-x) \to 3f(-x)$
- eine Verschiebung in y-Richtung $3f(-x) \to 3f(-x) + 2\,.$

skizziert werden kann.

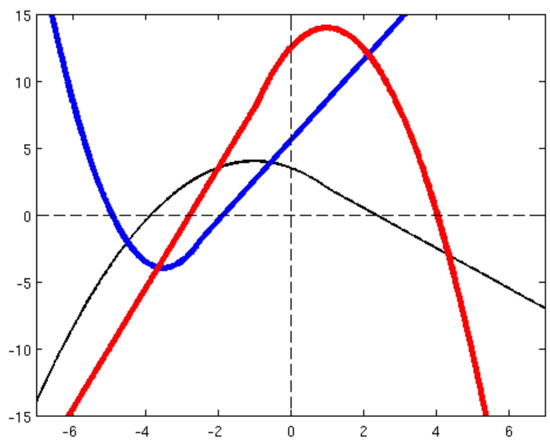

Figure 2: Die Graphen von $g(x)$ (blau) und $h(x)$ (rot).

Aufgabe 30

Gegeben sei die Gleichung

$$\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-x} + (x-1)(x-5) = 0 \tag{2}$$

sowie die beide reelle Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-x}, g(x) = -x^2 + 6x - 5\,.$$

Achtung: Es gab ein kleines Fehler in den Originale Text (e^{x} statt e^{-x})
a) Zeigen Sie *graphisch*: Die Gleichung (2) besitzt genau zwei reelle Lösungen.
Lösung.
Da $g(x) = -(x-1)(x-5)$, ist die Lösungmenge von (2)

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-x} + (x-1)(x-5) = 0\}$$

genau die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}\,.$$

D.h. können wir die Lösungen von (2) als die Schnittpunkte der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ betrachten.
Die Funktion $f(x)$ ist eine Exponentialfunktion, gespiegelt an die y-Achse, die in $x = 0$ den Wert $f(0) = \frac{4}{3}$ hat. Und sie ist immer positiv.
Die Funktion g ist ein Parabelbogen, nach unten geöffnet, mit Nullstellen $x = 1$ und $x = 5$. Außerdem, der Scheitelpunkt liegt bei $x = 3$, und $g(3) = 4$.
Mit diesen Informationen, die Graphen von f und g können wie im Bild 3 skizziert werden.

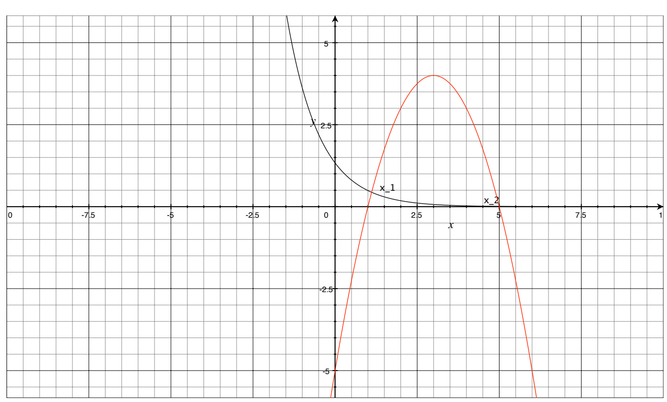

Figure 3: Die Graphen von $f(x)$ (schwarz) und $g(x)$ (rot), und die Lösungen x_1 und x_2 von (2).

b) Bestimmen Sie zusätzlich jeweils die Kardinalzahl cardA_i ($i = 1, 2, 3$) zu folgenden Mengen:

(i) $A_1 = \{x \in R \mid f(x) = g(x)\} \cap [0, 1[$, (ii) $A_2 = \{x \in R \mid f(x) = g(x)\} \cap [1, 5[$,
(iii) $A_3 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\} \cap [5, +\infty[$, (iv) $A_1 \cap A_3$

Lösung. (siehe auch Teil (a))
Da $f(x)$ immer positiv ist, müssen die Lösungen in der Intervall $]1, 5[$ liegen (wo auch $g(x)$ positiv ist). Dann:

$$\text{card}(A_1) = 0, \ \text{card}(A_2) = 2, \ \text{card}(A_3) = 0, \ \text{card}(A_1 \cap A_3) = 0$$

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion (Komposition) $h = f \circ g$
Lösung. Aus der definition, hat man:

$$h(x) = f(g(x)) = \frac{4}{3} \exp\left((x-1)(x-5)\right)$$

Daraus folgt, dass:

$$h(1) = h(5) = \frac{4}{3}$$

und

$$h(3) = \frac{4}{3} \exp(-4) \approx 0.024$$

Außerdem, wenn x gegen plus oder minus Unendlich geht, geht $h(x)$ immer nach plus Unendlich.
Beachte: Die Funktion $h(x)$ sieht änlich wie $-g(x)$ aus! Das passiert, weil e^x *monoton* ist.

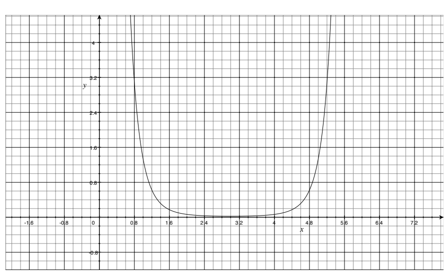

Figure 4: Die Funktion $h(x) = f \circ g(x)$.

Aufgabe 31

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit einem zu $x_0 = 0$ symmetrischen Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
f lässt sich eindeutig zerlegen in eine Summe

$$f = f_g + f_u\,,$$

gebildet aus einer geraden Funktion $f_g : D_f \to \mathbb{R}$ und einer ungeraden Funktion $f_u : D_f \to \mathbb{R}$. Für die beiden Summanden gilt:

$$f_g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\; f_u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (x \in D_f)\,. \tag{3}$$

Lösung.
Wir müssen beweisen, dass

(a) $f(x) = f_g(x) + f_u(x)\,.$

(b) f_g ist gerade und f_u ist ungerade.

(c) Die Zerlegung ist *eindeutig*.

(Alternativ kann man auch beweisen, dass: (a) wenn es eine Zerlegung gibt, dass ist sie eindeutig; (b) Die Funktionen f_g und f_u in (3) definiert, bilden eine solche Zerlegung)
Beweis (a). Die Zerlegung ist einfach zu beweisen:

$$f_g(x) + f_u(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2} + \underbrace{\frac{f(-x)}{2} - \frac{f(-x)}{2}}_{=0} = f(x)$$

Q.E.D. (a)

Beweis (b). Um die Symmetrieeingenschaften zu zeigen, berechnen wir

$$f_g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = f_g(x)\,.$$

(also ist f_g gerade) und

$$f_u(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_u(x)$$

(also ist f_u ungerade).

Q.E.D. (b)

Beweis (c). Wir brauchen zuerst zwei kleine zwischenergebnisse:
(1). Die summe zwei geraden (bzw. ungeraden) Funktionen ist gerade (bzw. ungerade).
Beweis (1) Seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei gerade Funktionen. Dann:

$$(f_1 + f_2)(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$$

d.h., die Summe $f_1 + f_2$ ist auch gerade.

Q.E.D. (1)

(2). Sei $k : D_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die gleichzeitig *gerade* und *ungerade* ist. Dann gilt: $\forall x \in D_f : k(x) = 0$.
Beweis (2) Für alle $x \in D_f$ gilt:

$$\underbrace{k(x) = k(-x)}_{k \text{ gerade}} \wedge \underbrace{k(-x) = -k(x)}_{k \text{ ungerade}} \Rightarrow k(x) = -k(x)$$

Aber es kann wahr sein, nur wenn $k(x) = 0$.

Q.E.D. (2)

Jetzt, um die Eindeutigkeit der Zerlegung zu beweisen, nehmen wir an, dass es eine weitere Zerlegung von $f(x)$ gibt:

$$f(x) = h_g(x) + h_u(x)$$

in einer gerade Funktion $h_g(x)$ und einer ungerade Funktion $h_u(x)$ (und wir werden zeigen dass die beide Zerlegungen gleich sind!). Also gilt es:

$$f_g + f_u = h_g + h_u \Rightarrow f_g - h_g = h_u - f_u\,.$$

Die Funktion $f_g - h_g$ ist aber die Summe zwei geraden Funktionen (f_g und $-h_g$), also ist sie gerade (Punkt (1)). Aber sie ist auch die Summe zwei ungeraden Funktionen (h_u und $-f_u$), also ist sie auch ungerade. Aus Punkt (2) folgt dann:

$$\forall x \in D_f :\ f_g(x) - h_g(x) = 0$$

also $\forall x \in D_f,\ f_g(x) = h_g(x)$. Mit dem gleichem Argument kann man auch zeigen, dass $\forall x \in D_f,\ f_u(x) = h_u(x)$.
Also ist die Zerlegung eindeutig.

Q.E.D. (c)