FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)
Übungsaufgaben – Zettel 6

Aufgabe 24

Sei $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis um $O = (0,0)$ mit Radius $r = 1$ gegeben. Weiterhin sei für festes, aber beliebig gewähltes $a \in R, a > 0$ die Abbildung

$$f : S_1 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (ax, ay) \text{ sowie } g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

definiert.
(a) Geben Sie eine visuelle Darstellung fr die Abbildung ff an. Ist f injektiv und/oder surjektiv?

Lösung. Die Abbildung f "schickt" jeden Punkt des Kreises (x, y) nach $(ax, ay) \in \mathbb{R}^2$. D.h., das Bild $f(S_1)$ ist genau die Menge:

$$f(K) = S_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\},$$

d.h., der Kreis um O mit Radius $r = a$ (siehe Bild 1).

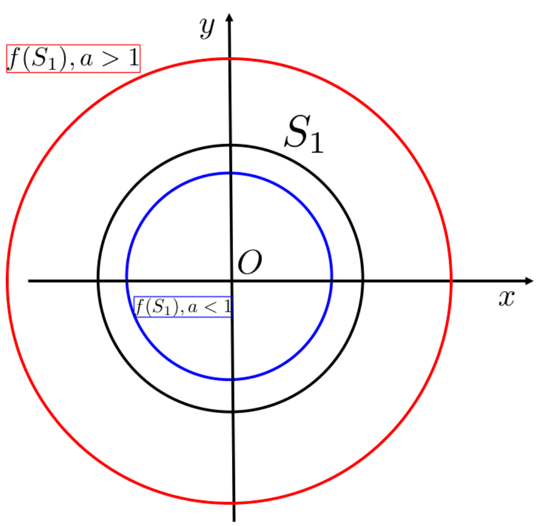

Figure 1: Das Bild von S_1 durch f, für $a > 1$ (rot) und $a < 1$ (blau).

Der Kreis S_1 wird dann grösser, wenn $a > 1$ oder kleiner, wenn $a < 1$. Falls $a = 1$, hat man $f = \mathrm{id}_{S^1}$.

Die Abbildung f ist injektiv.

Beweis. Seien (x, y), $(x', y') \in S_1$.

$$f(x,y) = f(x',y') \Rightarrow ax = ax' \wedge ay = ay' \Rightarrow x = x' \wedge y = y' .$$

Achtung: $f(x, y)$ hat zwei Komponenten, also $(f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, mit $f_1, f_2 : S_1 \to \mathbb{R}$.
$f(x,y) = f(x',y')$ bedeutet dann $f_1(x, y) = f_1(x', y')$ **und** $f_2(x, y) = f_2(x', y')$.

Q.E.D.

f ist aber *nicht* Surjektiv, weil $f(S_1) \neq \mathbb{R}^2$ (siehe Teil (a)).
b)Bestimmen Sie das Urbild $g^{-1}([2, +\infty))$ des Intervalls

$$[2, +\infty) = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 2\}$$

unter der Funktion g an.

Lösung.

$g^{-1}(\{\{x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \geq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\}$.

D.h., das gesuchtes Urbild enthält alle Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die Abstand von O größer als 2 haben (siehe Bild 2).

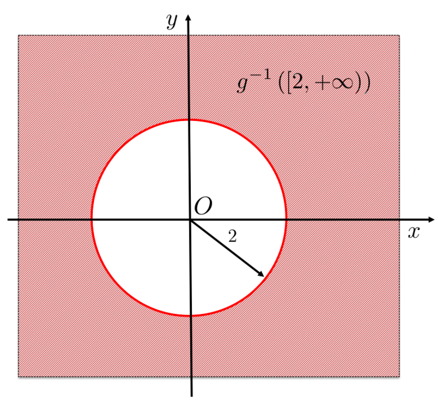

Figure 2: Das Urbild des Intervals $[2, +\infty)$.

(c) Untersuchen Sie die verknüpfte Abbildung (Komposition) $h = S_1 \to \mathbb{R}$, $h = g \circ f$. Ist h injektiv und/oder surjektiv?

Löusung. Aus der Definition, berechnen wir die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für ein beliebiges $(x, y) \in S_1$:

$$\forall (x,y) \in S_1 : \, h(x,y) = g(f(x,y)) = a \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{=1, \text{ weil } (x,y) \in S^1 .} = a \, .$$

Also ist h die *konstante* Abbildung $h(x, y) = a$, die alle Punkte nach a ab bildet. Die ist weder injektiv (alle Punkte haben das gleiche Bild) noch surjektiv (für alle Werte $u \neq a$ gilt: $h^{-1}(\{u\}) = \{\}$).

Aufgabe 26

Gegeben seien die folgenden sechs reellen Funktionen:

$$\begin{aligned} &f_0(x) = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x),\ f_1(x) = 1 - x,\ f_2(x) = \frac{1}{x} \\ &f_3(x) = \frac{1}{1-x},\ f_4(x) = \frac{x}{x-1},\ f_5(x) = \frac{x-1}{x}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen gemeinsamen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ für alle sechs Funktionen und berechnen Sie sämtliche Kompositionen $h_k := f_1 \circ f_k$, $k = 0, \ldots, 5$.

Lösung
(i) Die Definitionsbereiche D_k der Abbildung f_k ist:

f_k:	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
D_k:	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Der maximaler Definitionsbereich ist dann:

$$D = D_0 \cap D_1 \cap D_2 \cap \ldots D_5 = \bigcap_{k=0}^{5} D_k = \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}\,.$$

(ii) Jetzt müssen wir die Kompositionen berechnen (für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$):

$$h_k(x) := f_1 \circ f_k(x) = f_1(f_k(x)) = 1 - f_k(x)\,.$$

$h_0(x) = f_1 \circ f_0(x) = 1 - x = f_1(x)$

$h_1(x) = f_1 \circ f_1(x) = 1 - (1 - x) = f_0(x)$

$h_2(x) = f_1 \circ f_2(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x} = f_5(x)$

$h_3(x) = f_1 \circ f_3(x) = 1 - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{-x}{1-x} = \dfrac{x}{x-1} = f_4(x)$

$h_4(x) = f_1 \circ f_4(x) = 1 - \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{-1}{x-1} = \dfrac{1}{1-x} = f_3(x)$

$h_5(x) = f_1 \circ f_5(x) = 1 - \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1}{x} = f_2(x)$

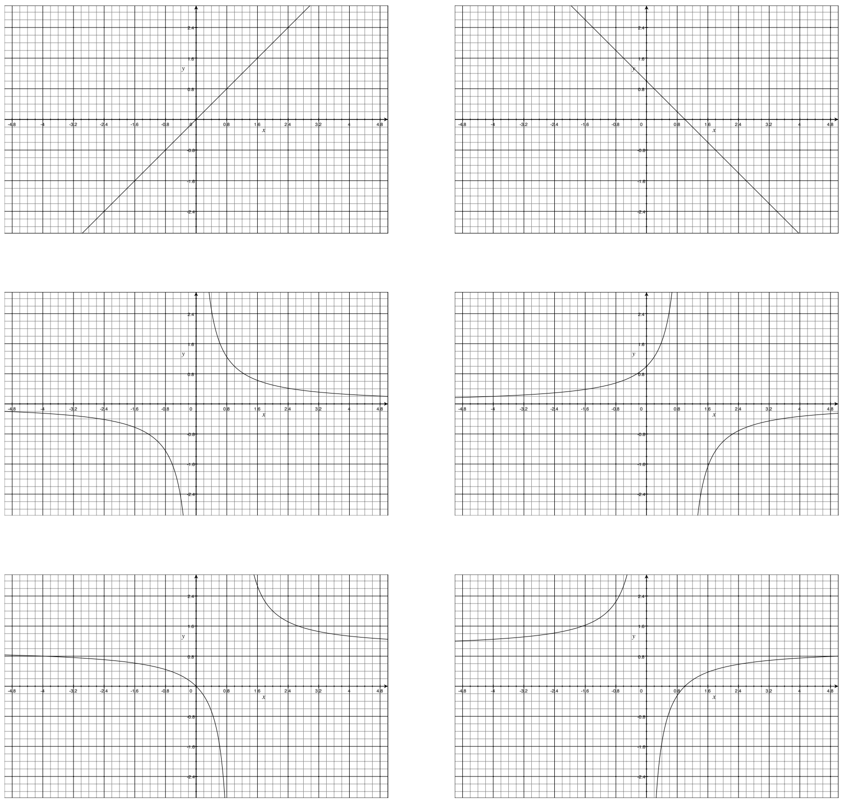

Figure 3: Die Funktionen $f_0, \ldots, f_5$.

Damit wurde schon ein Teil der Verknüpfungstafel berechnet:

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0						
f_1	f_1	f_0	f_5	f_4	f_3	f_2
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						

Die erste Reihe und die esrte Spalte sind auch sehr einfach!

Aufgabe 27

Seien die Mengen $I = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ injektiv}\}$, $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ surjektiv}\}$ gegeben.
(a) Geben Sie eine mengentheoretische Beschreibung für

$$B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ bijektiv}\}.$$

Lösung.
Eine Abbildung ist bijektiv wenn sie gleichzeitig injektiv und surjektiv ist. Also

$$B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \underbrace{f \text{ injektiv}}_{f \in I} \wedge \underbrace{f \text{ surjektiv}}_{f \in S}\} = I \cap S\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Mengen I und S hinsichtlich der Komposition $\circ$ von Abbildungen abgeschlossen sind.

Lösung.
Die Menge I ist hinsichtlich der Komposition $\circ$ abgeschlossen wenn es gilt:

$$\forall f, g \in I \Rightarrow f \circ g \in I\,.$$

Also ist es zu zeigen:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv $\wedge$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv $\Rightarrow$ $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv.
Beweis. Seien $x, x' \in \mathbb{R}$.

$$f(g(x)) = f(g(x')) \underbrace{\Rightarrow}_{f \text{ injektiv}} g(x) = g(x') \underbrace{\Rightarrow}_{g \text{ injektiv}} x = x'$$

Q.E.D.

Die Menge S ist hinsichtlich der Komposition $\circ$ abgeschlossen wenn es gilt:

$$\forall f, g \in S \Rightarrow f \circ g \in S\,.$$

Also ist es zu zeigen:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv $\wedge$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv $\Rightarrow$ $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv.
Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Um die Surjektivität von $f \circ g$ zu beweisen, suchen wir nach ein $x \in \mathbb{R}$ so dass $f(g(x)) = y$. f ist surjektiv, existiert also ein $z \in \mathbb{R}$, so dass $f(z) = y$. Da g auch surjektiv ist, existiert es ein $x \in \mathbb{R}$ so dass $g(x) = z$. Es gilt also:

$$f(g(x)) = f(z) = y \ \Leftrightarrow x \in (f \circ g)^{-1}(\{y\})\,.$$

Also ist $f \circ g$ surjektiv.

Q.E.D.

Also: **die Komposition von injektive Abbildungen ist injektiv**, und **die Komposition von surjektive Abbildungen ist surjektiv**.

c) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ zwei Abbildungen mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Zeigen Sie, dass dann folgt: f ist surjektiv und g ist injektiv.

Lösung.
$g : B \to A$ ist injektiv.
Beweis. Seien $x, x' \in B$, mit $g(x) = g(x')$. Aus $f \circ g = \mathrm{id}_B$ folgt:

$$x \underbrace{=}_{f\circ g=\mathrm{id}_B} f(g(x)) \underbrace{=}_{g(x)=g(x')} f(g(x')) \underbrace{=}_{f\circ g=\mathrm{id}_B} x'$$

Dann ist g injektiv.

Q.E.D.

$f : A \to B$ ist surjektiv.
Beweis. Um die Surjektivität zu beweisen, untersuchen wir, für ein beliebiges $x \in B$, das Urbild $f^{-1}(\{x\})$.
Nehmen wir das Element $y \in A$, definiert durch $y = g(x) \in A$. Es gilt:

$$f(y) = f(g(x)) = x$$

also, $\forall x \in B, g(x) \in f^{-1}(\{x\})$. D.h. $f^{-1}(\{x\}) \neq \{\}$, dann ist f surjektiv.

Q.E.D.