FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)
Übungsaufgaben – Zettel 5

Aufgabe 18

(siehe Musterlösung Zettel 4)

Aufgabe 20

In der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei die Relation $\sim^2 \subset \mathbf{R}^2$ definiert durch:

$$x \sim^2 y :\Leftrightarrow x^2 = y^2,\ (x, y \in \mathbb{R})$$

a) Zeigen Sie: $\sim^2$ ist eine *Äquivalenzrelation*.

Lösung Wir müssen die Eigenschaften (RE), (SYM), (TRA) nachprüfen.

(RE): $x \sim^2 x \Leftrightarrow x^2 = x^2$ (Wahr). Also ist $\sim^2$ reflexiv.
(SYM): $(x \sim^2 y \Rightarrow y \sim^2 x) \Leftrightarrow (x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2$ (Wahr). Also ist $\sim^2$ symmetrisch.
(TRA): $x \sim^2 y \wedge y \sim^2 z \Rightarrow x \sim^2 z$ bedeutet:

$$x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2$$

und es ist Wahr. Also ist $\sim^2$ auch transitiv.

b) Geben Sie folgende Mengen an:

(i) $[0] = \{x \in \mathbb{R} : x \sim^2 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\} = \{0\}$

(ii) $[1] = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{1, -1\}$

(iii) $[1] \cap [-1] = [1]$ (Achtung: $-1 \in [1]$, also gilt $[-1] = [1]$, weil durch die Äquivalenzrelation eine Partition von R definiert wird!)

(iv) $[1] \cap [0] = \emptyset$

c) Skizzieren Sie die Quotientenmenge $\mathbb{P} := \mathbb{R}/_{\sim^2}$
Lösung Wir skizzieren zu erst die Menge:

$$\sim^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \sim^2 y\} \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$[x] = \{x, -x\}, \text{ also } (x,x), (x,-x), (-x,x), (-x,-x) \in \sim^2 \ (\sim^2 \subset \mathbb{R}^2)\,.$$

Dann, kann man die Menge $\sim^2$ durch die zwei *Diagonalen* (wie im Bild 1) darstellen.

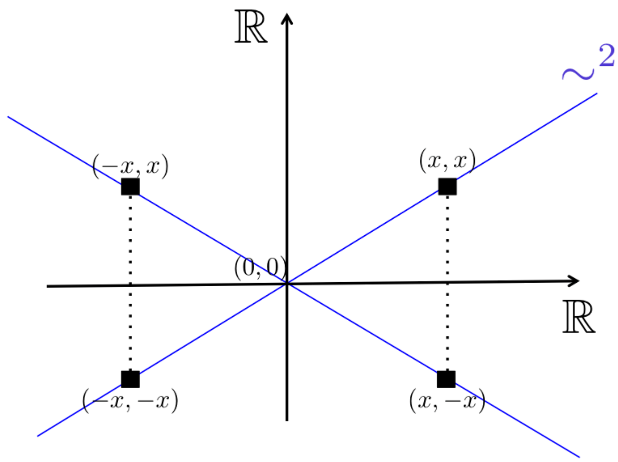

Figure 1: Die Äquivalenzrelation $\sim^2 \subset \mathbb{R}^2$ (in Blau) in der Produktmenge $\mathbb{R}^2$.

Die Quotientmenge
$$\mathbb{P} := \mathbb{R}/_{\sim^2} = \{[x], x \in \mathbb{R}\}$$
ist die Menge allen Äquivalenzklassen.
Durch $\sim^2$ werden die beide Elementen $x, -x$ *identifiziert*, also, bedeuten sie jetzt nur *einen* Punkt in P (das Element $[x]$).
Die Quotientmenge P kann man sich so vorstellen: wir nehmen die ganze Menge $\mathbb{R}$, halten 0 *fest* und klappen die negative Zahlen $\{x < 0\}$ über die positive Zahlen $\{x > 0\}$ zusammen (siehe Bild 2).

d) Auf der Menge P aus Teil (c) definieren wir eine Addition $\oplus : P \times P \to P$ mittels der Vorschrift

$$\oplus([x], [y]) = [x] \oplus [y] = [x^2 + y^2], \ (x, y \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

Untersuchen Sie:
(i) Ist $\oplus$ eine wohldefinierte innere Verknüpfung? (ii) Ist $\oplus$ kommutativ? (iii) Existiert ein neutrales Element bezüglich $\oplus$? (iv) Für welche $[x] \in P$ existiert ein additiv Inverses?

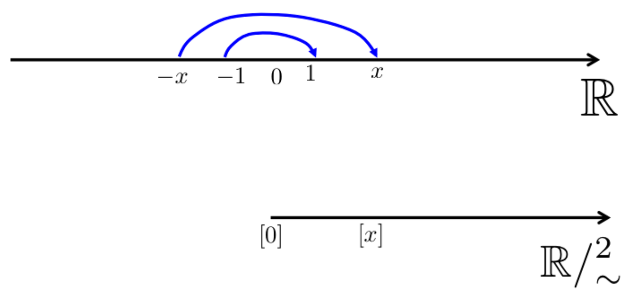

Figure 2: Die Quotientmenge $P = \mathbb{R}/_{\sim^2}$.

Lösung
Errata: Punkt (i) wurde in der (morgens-)Übung falsch behandelt! Hier ist die richtige Lösung.
(i) Die inner Verknüpfung $\oplus$ ist wohldefinidert wenn die Definition von $[x] \oplus [y]$ (die Addition von zwei Äquivalenzklassen) nicht von den einzelne Elemente von $[x]$ oder $[y]$ ($[x]$ und $[y]$ sind auch Mengen!) abhängig ist.
Anderes gesagt, ist die Verknüpfung *wohldefiniert* wenn es gilt:

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R} : \; x' \sim^2 x, y' \sim^2 y \Rightarrow [x'] \oplus [y'] = [x] \oplus [y]$$

(also, das Ergebnis von $[x] \oplus [y]$ ist immer das gleiche, wenn wir statt x oder y zwei *äquivalente* Elemente x' und y' nehmen)

Beweis. $x' \sim^2 x, y' \sim^2 y$ bedeutet $x^2 = x'^2$, $y^2 = y'^2$. Aber dann:

$$[x'] + [y'] = [x'^2 + y'^2] = [x^2 + y^2] = [x] + [y] \, .$$

Also ist die Verknüpfung wohl definiert.

Q.E.D.

Achtung: Man könnte sich fragen, ob es Verknüpfungen gibt, die nicht wohldefiniert sind. Als Beispiel, nehmen wir die Verknüpfung

$$[x] \diamond [y] = [x + y].$$

Um zu zeigen, dass $\diamond$ **nicht** wohldefiniert ist, nehmen wir $x = 1, y = 10$. Dann:

$$[x] \diamond [y] = [1 + 10] = [11]$$

Wenn man aber $y' = -10 \sim^2 y$ nimmt,

$$[x] \diamond [y'] = [1 - 10] = [9] \neq [11]$$

Also, das Ergebnis ist nicht immer das gleiche, obwohl wir immer die zwei gleiche Äquivalenzklassen addieren!
(ii) $\oplus$ ist kommutativ:

$$\forall[x],[y] \in P,\ [x] \oplus [y] = [y] \oplus [x]$$

Beweis.

$$[x] \oplus [y] = [x^2 + y^2] \underbrace{=}_{\text{"+" in } \mathbb{R} \text{ ist kommutativ!}} [y^2 + x^2] = [y] \oplus [x]$$

Q.E.D.

(iii) Man könnte "hoffen", dass $[0]$ neutrales fur $\oplus$ ist. Es gilt

$$[0] + [1] = [0^2 + 1^2] = [1],\ [0] + 0] = [0^2 + 0^2] = [0], \tag{2}$$

also, $[0]$ ist neutrales für $[0]$ und $[1]$. Aber

$$[0] + [2] = [0^2 + 2^2] = [4] \neq [2]$$

also ist $[0]$ kein neutrales Element bez. $\oplus$.
Formell, die Existenz eines neutrales Element bedeutet:

$$\exists[e] \in P : \forall[x] \in P : \ [x] + [e] = [x]$$

Das heisst, dass es existiert ein Element $[e]$ (nur eins) der neutrales für jedes $x \in P$ ist.
Wir beweisen dass:
Es existiert *kein* neutrales Element
Beweis. Wenn es ein neutrales Element $[e]$ geben würde, würde nach der Definition

$$\begin{aligned} &\forall x \in R : [x^2 + e^2] = [x] \Leftrightarrow \forall x \in R : \ x^2 = (x^2 + e^2)^2 \Leftrightarrow \forall x \in R : \ \pm x = x^2 + e^2 \\ &\Leftrightarrow e = \sqrt{\pm x - x^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Aber die letzte Gleichung (falls lösbar) liefert verschiedene e, für verschiedene x (außer die Fälle $x = 0, 1, -1$, wenn die Lösung $e = 0$ ist). Ein neutrales Element muss aber eindeutig für alle $[x] \in P$ sein. Also, es gibt kein neutrales Element.

Q.E.D.

(Es ist nur ein "Zufall", dass $[0]$ für ein paar Klassen neutrales ist!)

(iv) Da es kein neutrales Element gibt, kann man auch nicht nach Inverses suchen!
[Extra-Aufgabe] (iv.1) Sei eine neue Verknüpfung durch

$$[x] * [y] = [\sqrt{x^2 + y^2}]$$

definiert. Man kann dann beweisen:

- $*$ ist wohldefiniert,
- $*$ ist kommutativ,
- $[0]$ ist neutrales Element bezüglich $*$,
- ein inverses Element existiert für alle $[x] \in P$ nicht, sondern nur wenn $[x] = [0]$ (in diesem Fall $-[x] = [0]$).

(e) Sei $f : P \to \mathbb{R}$ die reelle Abbildung, definiert durch

$$f([x]) = |x|, x \in \mathbb{R}$$

(i) Untersuchen Sie, ob f injektiv bzw. ob f surjektiv ist. (ii)Läßt sich f durch geeignete Einschränkungen des Definitions- bzw. Wertebereichs bijektiv machen? Wie lautet dann die Umkehrabbildung f^{-1}?

Lösung. (i) Wir beweisen die Injektivität von f durch:

$$\forall [x], [y] \in P : \ f([x]) = f([y]) \Rightarrow [x] = [y]$$

Achtung: auf die rechte Seite steht $[x] = [y]$ und nicht $x = y$!)
Beweis.

$$f([x]) = f([y]) \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x \sim^2 y \Leftrightarrow [x] = [y]$$

Q.E.D.

Die Abbildung f ist nicht surjektiv, d.h.

$$\exists w \in \mathbb{R} : f^{-1}(\{w\}) = \emptyset$$

Beweis. Alle *negative Zahlen* haben kein Urbild. D.h.

$$\forall w \in \mathbb{R},\ w < 0 \Rightarrow f^{-1}(\{w\}) = \{[x] \in P : |x| = w\} = \emptyset$$

(weil $|x|$ immer positiv ist).

Q.E.D.

Idee: Wenn negative Zahlen kein Urbild durch f haben, um eine surjektive Einschränkung von f zu definieren, konnen wir den Wertebereich als $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ einschränken. (Hinweis: Das kann man sehr gut im Bild 2 sehen!)
Also ist

$$f : P \to \mathbb{R}_+$$

bijektiv, d.h. injektiv (weil f schon injektiv war) *und* surjektiv.
Die Umkehrabbildung $f : \mathbb{R}_+ \to P$ lautet dann:

$$f^{-1}(y) = [y] \, (y \in \mathbb{R}_+) \, ,$$

weil es gilt:

$$\forall [x] \in P : \; f^{-1}(f([x])) = f^{-1}(|x|) = [|x|] = [x],$$
$$\forall y \in \mathbb{R}_+ : \; f(f^{-1}(y)) = f([y]) = |y| = y \; (y \geq 0) \, .$$

Beispiele:

$$f(f^{-1}(3)) = f([3]) = |3| = 3$$
$$f^{-1}(f([3])) = f^{-1}(|3|) = f^{-1}(3) = [3]$$
$$f(f^{-1}(10) = f([10]) = |10| = 10$$
$$f^{-1}(f([-3])) = f^{-1}(|-3|) = f^{-1}(3) = [3] = [-3]$$

Aufgabe 21

Bilden Sie für die folgenden gegebenen Funktionen f und g jeweils die Funktionen: (i) $g - f$, (ii) $f \cdot g$, (iii) $\frac{f}{g}$, sowie (iv) $f \circ g$ und (v) $g \circ f$ und geben Sie dabei zusätzlich die jeweils maximalen Definitionsbereiche D_f, D_g, D_{g-f}, $D_{f \cdot g}$, $D_{\frac{f}{g}}$, $D_{f \circ g}$, $D_{g \circ f}$ an.

$$\text{(a) } f(x) = \sin x, \; g(x) = x^2 .$$

Lösung.
D_f, D_g: Der Definitionsbereich für beide f und g ist die ganze Menge $\mathbb{R}$.
(i) $(g - f)(x) = g(x) - f(x) = x^2 - \sin(x)$, $D_{g-f} = \mathbb{R}$.
(ii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \sin(x)$, $D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$.
(iii) $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$, $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(iv) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.
(v) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 22

Suchen Sie zu den folgenden gegebenen Funktionen f jeweils die Umkehrfunktion f^{-1} und bestimmen Sie jeweils für die Ausgangs- und die Umkehrfunktion den entsprechenden maximalen Definitionsbereich

(a) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$

(b) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$

Lösung.
(a.i) **Bestimmung der Umkehrfunktion.** Um die Umkehrfunktion definieren zu können, müssen wir die Injektivität der Abbildung f untersuchen (siehe Skript [Kapitel 3, S. 42]).
Zuerst bestimmen wir den Definitionbereich von f: Es muss gelten:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 .$$

Dann ist $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$.
Dann kann man zeigen, dass f injektiv ist: $\forall x_1, x_2 \in D_f$ gilt

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \Rightarrow \sqrt{x_1 - 1} \neq \sqrt{x_2 - 1} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Also ist

$$f : D_f \to \mathbb{R}$$

injektiv.

Die Funktion f ist aber nicht surjektiv [Frage: Warum?]. Um eine surjektive Einschränkung zu definieren, nehmen wir:

$$f : D_f \to f(D_f),$$

wobei $f(D_f)$ das Bild von D_f ist (dann ist f automatisch bijektiv). Man hat:

$$f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} : \ y \geq 2\}$$

Beweis.

$$f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = f(x), \, x \geq 1\} = \{y \in \mathbb{R} : \ y = \sqrt{x-1} + 2, \, x \geq 1\} =$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \ y \geq 2\}.$$

Q.E.D.

Um die Umkehrfunktion von $f : D_f \to f(D_f)$ zu bestimmen, müssen wir, für beliebiges $y \in f(D_f)$ (also $y \geq 2$), die Gleichung

$$f(x) = y$$

nach x lösen.

$$\sqrt{x-1} + 2 = y \Leftrightarrow x - 1 = (y+2)^2 \Leftrightarrow x = 1 + (y-2)^2, \tag{4}$$

also lautet die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : f(D_f) \to D_f, \ f^{-1}(y) = 1 + (y-2)^2 \, . \tag{5}$$

(a.ii) **Definitionsbereich von f^{-1}.** Die Abbildung $f^{-1}(y)$ definiert durch (5) hat, als Definitionsbereich, die Menge

$$f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} : \ y \geq 2\} \, .$$

Diese Funktion ist aber für jedes $y \in \mathbb{R}$ definiert, also ist der maximalen Definitionsbereich

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

(damit ist die Aufgabe schon erledigt).
Wieso ist der Definitionsbereich der Inverse von f in (5) kleiner?
f^{-1} ist die Umkehrfunktion von **2** Abbildungen:

$$f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \text{ und } g(x) = -\sqrt{x-1} + 2 \, .$$

[Frage: Warum?] D.h. f^{-1} mit Einschränkung des Definitionsbereichs als $\{y \in \mathbb{R} : \ y \geq 2\}$ ist die Umkehrfunktion von f, und f^{-1} mit Einschränkung des

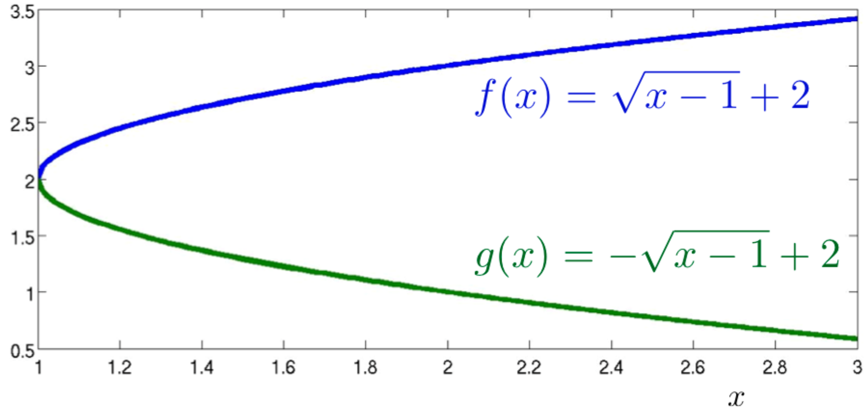

Figure 3: Die Funktionen $f(x) = \sqrt{(}x-1) + 2$ (blau) und $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ (grün).

Definitionsbereich als $\{y \in \mathbb{R} : y \leq 2\}$ ist die Umkehrfunktion von g (siehe Bild 3).
Wir haben in Teil (a.i) f^{-1} als Umkehrfunktion von f gesucht, und deswegen nur den Definitionsbereich $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\}$ gefunden.

(b.1) **Umkehrfunktion.** Wie in (a), wir müssen zu erst den Definitionsbereich von f bestimmen und die Injektivität von f nachprüfen.
Der Definitionbereich von $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ ist

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3\}\,.$$

$f : D_f \to \mathbb{R}$ ist injektiv.
Beweis. Seien $x_1, x_2 \in D_f$ beliebig.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1+1}{x_1+3} &= \frac{2x_2+1}{x_2+3} \\ \underbrace{\Leftrightarrow}_{x_1, x_2 \neq -3\,!} \quad (2x_1+1)(x_2+3) &= (2x_2+1)(x_1+3) \\ \Leftrightarrow 6x_1x_2 + 6x_1 + x_2 + 3 &= 6x_1x_2 + 6x_2 + x_1 + 3 \\ \Leftrightarrow 6x_1 + x_2 &= 6x_2 + x_1 \\ \Leftrightarrow 5x_1 &= 5x_2 \; (-x_1 - x_2 \text{ links und rechts}) \\ \Leftrightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Ist die Abbildung auch surjektiv? Eine andere möglichkeit, um die Surjektivität zu untersuchen ist die Umkehrfunktion zu berechnen. In beiden Fälle (Surjektivität und Umkehrfunktion), müssen wir die Gleichung

$$\frac{2x+1}{x+3} = y$$

lösen. Dann:

- wenn es für jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Lösung $x = f^{-1}(y)$ gibt, ist die Abbildung surjektiv;
- wenn die Gleichung *nicht* für jedes $y \in \mathbb{R}$ lösbar ist (sondern nur für $y \in W \subset \mathbb{R}$), werden wir den Wertebereich der Abbildung einschränken (zu W).

Sei dann $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir suchen $x \in \mathbb{D}_f$ so dass:

$$\frac{2x+1}{x+3} = y \Leftrightarrow 2x+1 = y(x+3) \Leftrightarrow x(2-y) = 3y-1 \Leftrightarrow x = \frac{3y-1}{2-y} \tag{6}$$

Die Gleichung ist dann lösbar für $y \neq 2$, also:

$$f : D_f \to \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

ist injektiv und surjektiv (also bijektiv), und die Umkehrfunktion lautet

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}\backslash\{-3\},\ f^{-1}(y) = \frac{3y-1}{2-y}\,,$$

b.ii) der maximale Definitionbereich ist

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\{2\}\,.$$

[**Frage: Ist jetzt** $f(D_f) = D_{f^{-1}}$**?**]