FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)
Übungsaufgaben – Zettel 4

Aufgabe 15

Für zwei beliebige reelle Zahlen $a > 0$, $b > 0$ bezeichne $A(a,b) := \frac{a+b}{2}$, das arithmetische, $G(a,b) := \sqrt{ab}$ das geometrische, $H(a,b) := \frac{a+b}{2ab}$ das harmonische und $Q(a,b) := \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ das quadratische Mittel von a und b. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\min(a,b) \leq H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b) \leq Q(a,b) \leq \max(a,b), \qquad (1)$$

wobei in jedem Teil "=" genau dann auftritt, wenn $a = b$ ist.

Lösung
Achtung [Würzel]: für jedes $a \in \mathbb{R}$, gibt es 2 Zahlen $-\sqrt{a}, \sqrt{a}$, für die gilt

$$-\sqrt{a} \cdot -\sqrt{a} = a, \ \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Für diese Aufgabe, definieren wir $\sqrt{a}$ als die *positive* Zahl, die multipliziert mit sich selbst a ergibt.
<u>Wir betrachten zuerst der Fall $a \leq b$</u> (dann werden wir uns auch um $b \leq a$ und $a = b$ kümmern). D.h:

$$a = \min(a,b), \ b = \max(a,b)$$

Die Ungleichungen in (1) werden wir in mehrere Schritte beweisen.
(1) $a \leq H(a,b) \leq b$
Beweis. Aus $a, b > 0$ folgt:

$$a + b > 0, \ ab > 0, \ a^{-1} > 0, \ b^{-1} > 0$$

(siehe Aufgabe 14). Dann:

$$\begin{aligned} a \leq \frac{2ab}{a+b} &\Leftrightarrow a(a+b) \leq 2ab \text{ (links und rechts } \cdot(a+b)) \\ &\Leftrightarrow a^2 \leq ab \text{ (links und rechts } -ab) \\ &\Leftrightarrow a \leq b \text{ (links und rechts } \cdot a^{-1}) \end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung ist wahr. Der Beweis $\frac{2ab}{a+b} \leq b$ ist änlich.

Q.E.D.

(2) $a \leq A(a,b) \leq b$

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \Leftrightarrow a+a \leq a+b \leq b+b$$

und die beide Ungleichungen $a+a \leq a+b$, $a+b \leq b+b$ folgen aus $a \leq b$.

Q.E.D.

(3) $a \leq G(a,b) \leq b$

Wir brauchen folgendes (Zwischen-)Ergebnis:
(3.1) $0 < b \leq a \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$
Beweis. Da $\sqrt{a}, \sqrt{b} > 0$, gilt $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$, und

$$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq b$$

(also ist die Äquivalenz bewisen).

Jetzt haben wir:

$$a \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b \text{ (aus (3.1))}.$$

Der Beweis $\sqrt{ab} \leq b$ ist änlich.

Q.E.D.

(4) $H(a,b) \leq A(a,b)$

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2 \,.$$

Und die letzte Ungleichung ist wahr (siehe Aufgabe 14, Punkt (v)).
(5) $H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$
Für beliebige a, b gilt:

$$G(a,b) = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2}} = \sqrt{H(a,b) \cdot A(a,b)} = G(H(a,b), A(a,b))$$

d.h. das geometrische Mittel von a, b ist auch das geometrische Mittel von $H(a,b)$ und $A(a,b)$.
Es folgt dann aus Punkt (3) (wo man statt a und b, $H(a,b)$ und $A(a,b)$ benutzt):

$$H(a,b) \leq \underbrace{G(H(a,b), A(a,b))}_{=G(a,b)} \leq A(a,b) \,.$$

Damit haben wir bewiesen dass gilt:

$$a \leq H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b) \leq b \,,$$

und müssen wir noch die "lage" des $Q(a,b)$ bestimmen.

(6) $A(a,b) \le Q(a,b)$

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \left(a^2+b^2+2ab\right) \le 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow 2ab \le a^2+b^2 \Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2$$

Und die letzte Ungleichung ist Wahr (siehe Aufgabe 14, Punkt (v)).

(7) $Q(a,b) \le b$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b \Leftrightarrow a^2+b^2 \le 2b^2 \Leftrightarrow a^2 \le b^2 \Leftrightarrow a \le b\,(\text{aus (3.1) })$$

Und damit haben wir, wenn $a < b$ alle Ungleichungen in (1) bewiesen:

$$a \le b \Rightarrow a \le H(a,b) \le G(a,b) \le A(a,b) \le Q(a,b) \le b. \tag{2}$$

Falls $b > a$, kann man beweisen (genau wie oben, wobei nur a und b umgetauscht werden sollen)

$$b \le a \Rightarrow b \le H(a,b) \le G(a,b) \le A(a,b) \le Q(a,b) \le a. \tag{3}$$

Aus (2)–(3) folgt dann:

$$\min(a,b) \le H(a,b) \le G(a,b) \le A(a,b) \le Q(a,b) \le \max(a,b). \tag{4}$$

Wir müssen noch den Fall $a = b$ betrachten, und zeigen dass

$$a = b \Leftrightarrow \min(a,b) = H(a,b) = G(a,b) = A(a,b) = Q(a,b) = \max(a,b).$$

Um die Äquivalenz zu zeigen, beweisen wir zwei Implikationen:

($\Rightarrow$) $a = b \Rightarrow \min(a,b) = H(a,b) = G(a,b) = A(a,b) = Q(a,b) = \max(a,b)$

($\Leftarrow$) $\min(a,b) = H(a,b) = G(a,b) = A(a,b) = Q(a,b) = \max(a,b) \Rightarrow a = b$

$\Leftarrow$) Aus $\min(a,b) = H(a,b) = G(a,b) = A(a,b) = Q(a,b) = \max(a,b)$ folgt auch dass $\min(a,b) = \max(a,b)$, und das gilt genau dann, wenn $a = b$.
$\Rightarrow$) 1. Weg: Man kann alle Gleichungen direkt prüfen:

$$a = H(a,a) = G(a,a) = A(a,a) = Q(a,a)$$

2. Weg (schneller): $a = b \Rightarrow \min(a,b) = \max(a,b)$. Aber d.h. dass der erste und letzte Term in der grosse Ungleichung (4) gleich sind. Und es kann nur Wahr sein, wenn auch alle die "$\leq$", die dazwischen liegen, "$=$" sind.
Hinweis: Die Implikation

$$(a \leq x \leq b) \wedge (a = b) \Rightarrow a = x = b$$

wir oft in Analysis benutzt!
Damit ist der Beweis fertig.

Q.E.D.

Aufgabe 18

Gegeben sind die beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x-1)(y+1) + 1$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g(u) := (u+1, 2u).$$

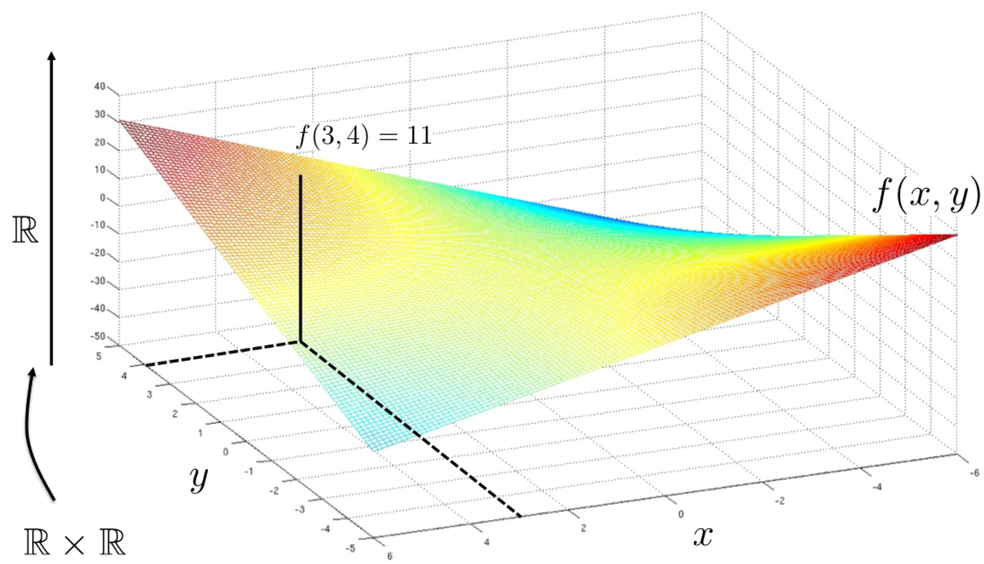

Figure 1: Eine Skizze der Funktion $f(x,y)$ für $-6 \leq x \leq 6$ und $5 \leq y \leq 5$.

a) Bestimmen Sie jeweils die folgenden Funktionswerte für die zusammengesetzten Abbildungen

$$h_1 = g \circ f, \text{ und } h_2 = f \circ g$$

auf direktem Wege:

(i) $h_1(3,4)$,

(ii) $h_1(2,1)$,

(iii) $h_2(6)$,

(iv) $h_2(1)$.

Lösung. $h_1 = g \circ f$ bedeutet: g nach f, d.h.

$$h_1(3,4) = g(f(3,4)) = g(2 \cdot 5 + 1) = g(11) = (12, 22)$$

$$h_1(2,1) = g(f(2,1)) = g(3) = (4,6)$$

$h_2 = f \circ g$ bedeutet: f nach g, d.h.

$$h_2(6) = f(g(6)) = f(7,12) = 6 \cdot 13 + 1 = 79$$

$$h_2(1) = f(g(1)) = f(2,2) = 4.$$

b) Leiten Sie jeweils die Abbildungsvorschrift für die beiden Kompositionen

$$h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

her und testen Sie diese mithilfe der in Teil (a) ermittelten konkreten Funktionswerte.

Lösung.

$h_1(x,y) = g(f(x,y)) = g(\,(x-1)(y+1)+1\,) = ((x-1)(y+1)+2, 2(x-1)(y+1)+2)$

(also, $h_1(3,4) = (11,20)$, $h_1(2,1) = (3,4)$).

$$h_2(u) = f(g(u)) = f(u+1, 2u) = u(2u+1) + 1 = 2u^2 + u + 1$$

(also, $h_2(6) = 78$, $h_2(1) = 3$).

[Frage: wie würde die Grafik von $h_2(u)$ aussehen?]

c) Untersuchen Sie (mit Begründung) die Abbildung g auf Injektivität und die Abbildung f auf Surjektivität.

Lösung c.1): Injektivität der Abbildung g bedeutet

$$(1)\, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

oder (äquivalent)

$$(2)\, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} :\ g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Wir zeigen (2): Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so dass $g(x_1) = g(x_2)$. D.h.

$$(x_1 + 1, 2x_1) = (x_2 + 1, 2x_2) \Leftrightarrow (x_1 + 1 = x_2 + 1) \wedge (2x_1 = 2x_2)$$

(aus der Definition von "=" zwischen Elemente einer Produktmenge). Die letzte Gleichungen sind aber genau dann erfüllt, wenn

$$x_1 = x_2,$$

dann ist g injektiv.
c.2): Surjektivität der Abbildung f bedeutet:

$$\forall u \in \mathbb{R} : f^{-1}(\{u\}) \neq \emptyset.$$

Deswegen betrachten wir das Urbild $f^{-1}(\{u\})$ eines beliebiges Element $u \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}(\{u\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)(y + 1) + 1 = u\} \tag{5}$$

Um die Surjektivität zu zeigen, zeigen wir dass die Menge $f^{-1}(\{u\})$ *nie* leer ist, d.h.:

$$\forall u \in \mathbb{R} :\ \exists (x, y) \in f^{-1}(\{u\})$$

Es bedeutet aber (siehe (5)!)

$$\forall u \in \mathbb{R} :\ \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = u$$

Beweis. Wir müssen eine Lösung der Gleichung $f(x, y) = u$ finden. Eine möglichkeit (aber nicht die einzige!) ist folgendes. Wir setzen $y = 0$, und suchen ein Lösung in der Form

$$f(x, 0) = u.$$

d.h.

$$(x - 1) + 1 = u.$$

Die letzte Gleichung ist mit $x = u$ gelöst, d.h.,

$$f(u, 0) = u \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R} : (u, 0) \in f^{-1}(\{u\}) \Rightarrow f^{-1}(\{u\}) \neq \emptyset.$$

Wir haben denn, für jeden $u \in \mathbb{R}$, ein Element des Urbildes gefunden (es gibt unendliche Elementen in $f^(\{u\})$, wir brauchen aber nur eins zu finden!). Dann ist f surjektiv.
(Achtung: Um die *nicht* Surjektivität zu zeigen, musste man ein $u_0 \in \mathbb{R}$ finden, so dass $f^{-1}(\{u_0\}) = \{\}$. In diesem Fall gibt es aber kein solches Element!)