FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)
Übungsaufgaben – Zettel 3

Voraussetzungen

Körperaxiome

Sei K eine Menge, und seien $+, \cdot$ zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + :& K \times K \to K, & \cdot : K \times K \to K \\ & (a,b) \to a+b & (a,b) \to a \cdot b \end{aligned}$$

(das heißt, dass $\forall a, b \in K$, $a + b \in K$ und $a \cdot b \in K$).
$(K, +, \cdot)$ bildet ein **Körper** wenn die folgenden Axiome gelten:

(A1) $\forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$ ("+" ist **assoziativ**)

(A2) $\forall a, b \in K : a + b = b + a$ ("+" ist **kommutativ**)

(A3) $\exists e \in K$, so dass $\forall a \in K : a + e = a$ (e ist ein **Neutrales Element** für "+", wird auch mit "0" bezeichnet)

(A4) $\forall a \in K$, $\exists a^* \in K : a + a^* = 0$. a^* ist dann das **inverse Element** von a bez. $+$, und wird mit $-a$ bezeichnet

(M1) $\forall a, b, c \in K : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ("$\cdot$" ist **assoziativ**)

(M2) $\forall a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a$ ("$\cdot$" ist **kommutativ**)

(M3) $\exists \hat{e} \in K$, so dass $\forall a \in K : a \cdot \hat{e} = a$ ($\hat{e}$ ist ein **Neutrales Element** für "$\cdot$", wird auch mit "1" bezeichnet)

(M4) $\forall a \in K/\{0\}$, $\exists a^* \in K/\{0\} : a \cdot a^* = 1$. a^* ist dann das **inverse Element** von a bez. $\cdot$, und wird mit a^{-1} bezeichnet

(DIS) $\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (**Distributivgesetz**)

Varianten

[**Gruppe**] Eine Menge mit eine Verknüpfung $(K, +)$ und wo die Axiome (A1)–(A4) gelten, ist eine *abelsche Gruppe* (siehe LinAlg 1).
[**Integritätsring**] Eine Menge mit zwei Verknüpfungen $(K, +, \cdot)$, wo die Axiome (A1)–(A4), (M1–M3), (DIS) gelten (aber die kein multiplikativ inverses Element hat) und wo gilt

- (NF) $\forall a, b \in K : a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ (**Nullteilferfreiheit** – das heisst, das Produkt von zwei Elementen ist gleich null (= additiv neutrales Element), genau wenn mindestens eine von beiden auch null ist)

ist ein *Inegritätsring*.
Beispiele. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ (die rationalen Zahlen mit Standard-Addition und -Multiplikation) ist ein Körper, wie auch $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, aber ein Integritätsring.
Achtung: ein Körper ist wohl definiert, wenn man K, $+$, und $\cdot$ angibt. Also, die Aussage "$\mathbb{Q}$ ist ein Körper" ist inkorrekt! $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper

Abbildung

Siehe Skript (Kapitel 3).

Injektivität, Surjektivität einer Abbildung

Siehe Skript (Kapitel 3).

Aufgabe 12

Ausgehend vom Zahlbereich $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ wollen wir den Zahlbereich $\mathbb{Z}$ einführen. Ausgangspunkt ist die Frage nach der allgemeinen Lösbarkeit der Gleichung

$$b + x = a \tag{1}$$

für $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig. Dazu wird die Gleichung (1) mit dem geordneten Paar $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ "identifiziert".
(Punkte (a) und (b) wurden schon in Tutorium diskutiert)

c) Definiert man $\mathbf{Z}$ (Achtung: wir wissen noch nicht dass die neue Menge $\mathbf{Z}$ "genau" die Standardmenge $\mathbb{Z}$ ist. Deshalb benutzen wir erst eine andere Notation) als die Menge $\mathbb{N}^2/_\sim$ der Äquivalenzklassen und $\mathbf{0} := [1, 1]$ sowie zu $\mathbf{x} = [a, b]$ die Zahl "$-x$" $= [b, a]$, so bildet $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ einen *Integritätsring* mit $\mathbf{1} = [2, 1]$ als *Einselement*, d.h., eine Menge, in der die Körperaxiome gelten mit Ausnahme der Existenz des multiplikativ inversen Elements, anstelle welcher die sogenannte *Nullteilferfreiheit* tritt:

$$\text{(NF)}: \forall a, b \in \mathbf{Z}: \ a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0\,.$$

Lösung. Wir müssen

- zwei Verknüpfungen definieren: $+$ und $\cdot$
- zeigen, dass die Axiome (A1)–(A4), (M1)–(M3), (DIS) und (NF) gelten (mit den definierten Operationen)

Die Verknüpfungen zwischen zwei Elementen von $\mathbb{N}^2/_\sim$ werden wir so definieren:

$$[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \cdot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$$

("$+$" ist – im Prinzip – etwas anderes als "$+$", weil "$+$" addiert zwei Elementen von $\mathbb{N}^2/_\sim$, während $+$ addiert zwei natürliche Zahlen. Genau so für "$\cdot$")

(A1) Zu beweisen ist, dass:

$$\forall [a, b],\ [c, d],\ [e, f] \in \mathbb{N}^2/_\sim:\ ([a, b] + [c, d]) + [e, f] = [a, b] + ([c, d] + [e, f])$$

Beweis. Seien $[a,b]$, $[c,d]$, $[e,f] \in \mathbb{N}^2/_\sim$ beliebig. Es gilt (auf Farbenunterschied achten!):

$$\begin{aligned}([a,b]+[c,d])+[e,f] &= [a+c,b+d]+[e,f] \text{ (Definition von } +) \\ &= [(a+c)+e,(b+d)+f] \text{ (Definition von } +) \\ &= [a+(c+e),b+(d+f)] \text{ (Assoziativgesetzt von + in } \mathbb{N}) \\ &= [a,b]+([c,d]+[e,f]) \text{ (Definition von } +) \quad \text{Q.E.D}\end{aligned}$$

(A2) Zu beweisen ist, dass:

$$\forall [a,b],\ [c,d] \in \mathbb{N}^2/_\sim:\ [a,b]+[c,d] = [c,d]+[a,b].$$

Beweis. Seien $[a,b]$, $[c,d] \in \mathbb{N}^2/_\sim$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}[a,b]+[c,d] &= [a+c,b+d] \text{ (Definition von } +) \\ &= [c+a,d+b] \text{ (Kommutativgesetzt von + in } \mathbb{N}) \\ &= [c,d]+[a,b] \text{ (Definition von } +) \quad \text{Q.E.D}\end{aligned}$$

(A3) Um die Gültigkeit von (A3) zu Zeigen, muss zuerst ein Neutrales Element definiert werden. Ein Kandidat ist schon im Text vorgeschlagen:

$$\mathbf{0} = [1,1]$$

Zunächst ist zu beweisen:

$$\forall [a,b] \in \mathbb{N}^2/_\sim:\ [a,b]+[1,1] = [a,b]$$

Beweis. Es gilt:

$$[a,b]+[1,1] = [a+1,b+1].$$

Aber $[a+1,b+1] = [a,b]$ weil $(a+1,b+1) \sim (a,b)$ (siehe Definition der Äquivalenzrelation).

Q.E.D.

(A4) Um die Gültigkeit von (A4) zu zeigen, muss zu erst für jedes Element von $\mathbb{N}^2/_\sim$, ein Inverses definiert sein. Wie im text vorgeschlagen, definieren wir, für jedes $\mathbf{x} = [a,b] \in \mathbb{N}^2/_\sim$:

$$-\mathbf{x} = [b,a] \in \mathbb{N}^2/_\sim.$$

Mit dieser Definition ist zu zeigen, dass

$$\forall [a,b] \in \mathbb{N}^2/_\sim:\ [a,b]+[b,a] = [1,1] \tag{2}$$

(anders geschrieben, $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$). (2) folgt aus

$$[a,b]+[b,a] = [a+b,b+a] = [1,1] \text{ (weil } (a+b,b+a) \sim [1,1])$$

Q.E.D.

(M1)–(M3). Die Axiome (M1)–(M3) werden genau wie (A1)–(A3) nachgewiesen.

(DIS). Es ist zu zeigen:

$$\forall [a,b],[c,d],[e,f] \in \mathbb{N}^2/_\sim :\ [a,b]\cdot([c,d]+[e,f]) = [a,b]\cdot[e,f]+[a,b]\cdot[c,d]$$

Beweis. Seien $[a,b],[c,d],[e,f] \in \mathbb{N}^2/_\sim$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
[a,b]\cdot([c,d]+[e,f]) =&\ [a,b]\cdot[c+e,d+f] = \\
&= [a\cdot(c+e)+b\cdot(d+f),\ a\cdot(d+f)+b\cdot(c+e)] \\
&= [a\cdot c+a\cdot e+b\cdot d+b\cdot f, a\cdot d+a\cdot f+b\cdot c+b\cdot e] \\
&\quad \text{(Distributivgesetzt für + und $\cdot$ in $\mathbb{N}$)} \\
&= [a\cdot c+b\cdot d, a\cdot d+b\cdot f]+[a\cdot e+b\cdot f, a\cdot f+b\cdot e] \\
&\quad \text{(Definition von +)} \\
&= [a,b]\cdot[c,d]+[a,b]\cdot[e,f] \text{ (Definition von $\cdot$)} \qquad \text{Q.E.D}
\end{aligned}$$

(NF). Es ist zu zeigen:

$$\forall [a,b],[c,d] \in \mathbb{N}^2/_\sim :\ [a,b]\cdot[c,d] = [1,1] \Rightarrow [a,b]=[1,1] \vee [c,d]=[1,1].$$

Allgemeine Beweistechnik: Um die Wahrheit einer Implikation

$$A \Rightarrow B \vee C$$

zu zeigen, kann man beweisen dass:

$$A \wedge \neg B \Rightarrow C\,.$$

[Frage: Warum?]
In diesem Fall werden wir beweisen

$$\left(\underbrace{[a,b]\cdot[c,d]=[1,1]}_{A} \wedge \underbrace{[a,b]\neq[1,1]}_{\neg B}\right) \Rightarrow \underbrace{[c,d]=[1,1]}_{C}$$

Beweis. Sei dann $[a,b]\neq[1,1]$ (also $a\neq b$). Aus den Definitionen von $\cdot$, $+$ folgt

$$\begin{aligned}
[a,b]\cdot[c,d]=[1,1] &\Leftrightarrow [a\cdot c+b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c]=[1,1] \\
&\Leftrightarrow [a\cdot c, a\cdot d]+[b\cdot d, b\cdot c]=[1,1] \\
&\Leftrightarrow [a\cdot c, b\cdot c]+[b\cdot d, a\cdot d]=[1,1]
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann man so umformulieren (aus der Definition von $+$):

$$\Leftrightarrow \underbrace{[a,b]+[a,b]+\ldots+[a,b]}_{c\,\text{Mal}}+\underbrace{[b,a]+[b,a]+\ldots+[b,a]}_{d\,\text{Mal}}=[1,1] \tag{3}$$

Aber $[b,a]$ is doch das Inverse von $[a,b]$, also können wir die einzelne Summe

$$[a,b]+[b,a](=[1,1])$$

von der letzten Gleichung (3) wegstreichen. Also ist jedes $[a,b]$ durch ein $[b,a]$ "neutralisiert". Daraus foglt, dass $c=d$ (also, $[c,d]=[1,1]$) ist, denn. Wenn es nicht so wäre, d.h. zum Beispiel $c>d$, dann würden in der linke Seite der Summe (3) noch Elemente $[a,b]$ übrig bleiben. Es darf aber nicht sein, weil die rechte Seite $[1,1]$ ist (und $[a,b]\neq[1,1]$).

Q.E.D.

d) Durch die *injektive* Abbildung $\phi:\mathbf{N}\to\mathbb{N}^2/_\sim$, mit $\phi(n)=[n+1,1],\ n\in\mathbb{N}$, wird der "alte" Bereich $\mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen strukturverträglich in den neuen Zahlbereich *eingebettet*. Dabei gilt

$$\forall m,n\in\mathbb{N}:\ \phi(m+n)=\phi(m)+\phi(n)\ \wedge\ \phi(m\cdot n)=\phi(m)\cdot\phi(n)\,. \tag{4}$$

Lösung. Wir zeigen, dass

d.1 ϕ injektiv ist.;

d.2 eigenschaft (4) gilt.

Injektivität (d.1) bedeutet:

$$\text{(i1) } \forall a,b:\ \phi(a)=\phi(b)\Rightarrow a=b$$

oder (äquivalent!)

$$\text{(i2) } \forall a,b:\ a\neq b\Rightarrow\phi(a)\neq\phi(b)$$

Beweis. Seien $a,b\in\mathbb{N}$ beliebig. Wir zeigen (i1).

$$\begin{aligned}\phi(a)=&\phi(b)\Rightarrow[a+1,1]=[b+1,1]\Rightarrow(a+1,1)\sim(b+1,1)\\&\Leftrightarrow a+2=b+2\Leftrightarrow a=b\,(a,b\in\mathbb{N}\ !)\end{aligned}$$

Für (d.2)

$$\begin{aligned}\phi(m+n)&=[m+n+1,1]\\&=[m+n+1,1]+[1,1]\,([1,1]\text{ ist neutrales Element der Addition})\\&[m+n+2,2]=[m+1,1]+[n+1,1]=\phi(m)+\phi(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(m\cdot n)&=[m\cdot n+1,1]=\\&=[mn+m+n+2,m+n+2]=\\&(\text{wenn man zu beiden Seiten } m+n+1 \text{ addiert})\\&=[m+1,1]\cdot[n+1,1]=\phi(m)\cdot\phi(n)\end{aligned}$$

Q.E.D.

e) Die Gleichung (1) ist nun in $\mathbf{Z}$ für beliebige $a, b \in \mathbf{Z}$ eindeutig lösbar. Die Lösung ist dann $\mathbf{x} = a - b = a + (-b)$.

Lösung. Wir zeigen dass

e.1 man für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$ die Gleichung in $\mathbb{N}^2/_\sim$ lösen kann,

e.2 die Lösung eindeutig ist.

Für (e.1) werden wir das Ergebnis vom Punkt (d) benutzen, nämlich dass eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ man mit $[a+1, 1]$ "identifizieren" kann. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und die Gleichung

$$b + x = a \tag{5}$$

gegeben. Man kann in $\mathbf{Z} = \mathbb{N}^2/_\sim$ die Gleichung in der Form

$$[b+1, 1] + x = [a+1, 1]$$

schreiben. Um eine Lösung zu finden, addieren wir links und rechts das Inverse von $[b+1, 1]$:

$$\underbrace{[1, b+1] + [b+1, 1]}_{=0} + x = [1, b+1] + [a+1, 1] = [a+2, b+2] = [a, b]$$

Dann ist $x = [a, b] = a - b \in \mathbb{Z}$ eine Lösung von $b + x = a$ (in $\mathbb{Z}$).
Um die Eindeutigkeit zu zeigen (e.2), beweisen wir folgendes:

Sei $y = [c, d] \in \mathbb{N}^2/_\sim$ eine weitere Lösung von $b + y = a$, dann ist $y = x$.
Beweis. $y = [c, d]$ ist eine Lösung von $b + y = a$ genau wenn (in $\mathbb{N}^2/_\sim$):

$$[b+1, 1] + [c, d] = [a+1, 1]$$

d.h. $[b+1+c, 1+d] = [a+1, 1]$. Aber das bedeutet:

$$b + 1 + c + 1 = 1 + d + a + 1 \,\text{(aus der Äquivalenzrelation)}$$

$$\Leftrightarrow b + c = a + d \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow [a, b] = [c, d] \Leftrightarrow x = y$$

Q.E.D.

Aufgabe 14

Geben sei ein Körper $(K, +, \cdot)$. Weiterhin gebe es einen Teilbereich $P \subset K$, *Positivbereich* genannt, mit folgenden drei Eigenschaften:

(TRI) $\forall a \in K$: entweder $a \in P$ oder $a = 0$ oder $-a \in P$,

(VA) $\forall a, b \in K : a \in P \wedge b \in P \Rightarrow a + b \in P$,

(VM) $\forall a, b \in K : a \in P \wedge b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$.

a) Man beweise, dass durch

$$a < b :\Leftrightarrow b - a \in P \tag{6}$$

eine strenge lineare (konnexe) Ordnungsrelation auf K definiert ist. Zeigen Sie weiterhin, dass dann durch

$$a \leq b :\Leftrightarrow a < b \vee a = b \tag{7}$$

automatisch eine Anordnung auf K induziert wird.
Lösung. Für Teil 1 (strenge Ordnung), müssen wir die Gültigkeit der Axiome der Anordnung (AR), (AS), (TRA) prüfen.
(AR): $\forall a \in K : \neg(a < a)$ bedeutet $a - a = 0 \notin P$, und das ist Wahr (folgt aus Eigenschaft (TRI)).
(AS): $a < b \Rightarrow \neg(b < a)$. Seien $a, b \in K$, mit $a < b$. Dann ist $b - a \in P$. Daraus folgt (wegen (TRI)), dass $a - b \notin P$.
(TRA) Seien $a, b, c \in K$, mit $a < b$ und $b < c$. Dann ist $b - a \in P$ und $c - b \in P$. Aus (VA) folgt:

$$(b - a) + (c - b) = c - a \in P$$

d.h. $a < c$.
Für Teil 2 (Anordung) müssen die Eigenschaften (RE), (ID), (TRA) bewiesen werden.
(RE): Folgt aus der Definition.
(ID): Seien $a, b \in K$, mit $a \leq b \wedge b \leq a$. Dann gilt

$$\underbrace{(b - a \in P \vee b = a)}_{A} \wedge \underbrace{(a - b \in P \vee b = a)}_{B}$$

Aber die Aussage A und B sind beide wahr, nur wenn $a = b$.
(TRA): Wie in Teil 1.
(b) Beweisen Sie unter Rückgriff auf die Definition (6), dass folgende Ungleichungsregeln in $(K, <)$ gelten:

(i) $\forall a, b, c \in K :\ a < b \Rightarrow a + c < b + c$
Beweis. Wenn $b - a \in P$, dann auch $(b + c) - (a + c) = b - a \in P$. d.h. $a + c < b + c$.

(ii) $\forall a, b, c \in K : \; a < b \wedge 0 < c \Rightarrow ac < bc$
Beweis. $0 < c$ bedeutet $c - 0 = c \in P$. Wenn $b - a \in P$, dann (aus (VM)) folgt $(b-a) \cdot c \in P \Leftrightarrow bc - ac \in P \Leftrightarrow ac < bc$.

(iii) $\forall a, b, c \in K : \; a < b \wedge c < 0 \Rightarrow bc < ac$
Beweis. $c < 0$ bedeutet dass $-c \in P$. Aus $-c \in P$ und $b - a \in P$ folgt:

$$(b-a)(-c) = -bc + ac = ac - bc \in P \Leftrightarrow bc < ac.$$

(iv) $\forall a, b \in K : \; 0 < a < b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

Wie beweisen zuerst folgende Eigenschaft:

(iv.1) $1 > 0$
(Achtung: für ein allgemeine Körper K, "1" heisst "multiplikativ neutrales Element", und "0" heisst "additiv neutrales Element") *Beweis von (iv.1).* Sei $a \in K$, $a \in P$. Falls $1 < 0$, hätte man

$$a \cdot 1 < 0 \, \text{siehe Punkt (iii)}$$

Das ist aber ein widerspruch, weil $a \cdot 1 = a > 0$. Daher muss $1 > 0$ sein.

Zunächst beweisen wir: (iv.2) $\forall c \in K \backslash \{0\} : c \in P \wedge \Rightarrow c^{-1} \in P.$
Beweis von (iv.1). Für jeden $c^{-1} \in K \backslash \{0\}$ gilt: entweder $c^{-1} \in P$, oder $-c^{-1} \in P$ (der Fall $c^{-1} = 0$ ist schon ausgeschlossen!)

Falls $c^{-1} < 0$, hätten wir dann

$$c \cdot c^{-1} < 0,$$

aber es kann nicht sein, weil $c \cdot c^{-1} = 1 > 0$ (siehe (iv.1)). Daher muss $c^{-1} > 0$ sein.

Und jetzt zeigen wir (iv): $\forall a, b \in K : \; 0 < a < b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}.$

Beweis. Aus $0 < a < b$ folgt

$$b \in P, a \in P, b - a \in P.$$

Aus (iv.2) folgt $, a^{-1}, b^{-1} > 0$, d.h.

$$a^{-1} \cdot (b-a) \cdot b^{-1} = a^{-1} - b^{-1} > 0 \Leftrightarrow b^{-1} < a^{-1}.$$

(v) $\forall a \in K^* = K \backslash \{0\} : \; a^2 = a \cdot a > 0$
Beweis. $\forall a \in K^*$ gilt entweder $a \in P$ (a positiv) oder $-a \in P$ (a negativ). Der Fall $a = 0$ ist in K^* schon ausgeschlossen. Falls $a \in P$, dann ist $a \cdot a \in P$ (Axiom (VA)). Falls $-a \in P$ ($a < 0$), dann $a^2 = -a \cdot -a > 0$ (Punkt (iii), mit $c = a$ und $b = 0$)

Aufgabe 16

Sei H die Menge aller Menschen, sowie F die Menge aller Frauen und $M = H \backslash F$ die Menge aller Männer. Betrachte dann die folgende Abbildungen:

(i) $f : H \to H$, $f(x)$ ist (biologische) Mutter von $x \in H$.

(ii) $g : H \to H$, $g(x)$ ist (biologische) Vater von $x \in H$.

(iii) $h : H \to F \times M$, $(f(x), g(x))$ ist (biologische) Elternpaar von $x \in H$.

Insbesondere gilt dann für jeden Menschen $x \in H$:

$$h(x) = (a, b) = (f(x), g(x))\,.$$

a) Beschreiben Sie in Worten die zusammengesetzen Abbildungen (Kompositionen)

(i) $f(f(x))$ ist (biologische) Grossmutter (mütterlicherseite) von x

(ii) $f(g(x))$ ist (biologische) Grossmutter (väterlicherseite) von x

(iii) $g(f(x))$ ist (biologische) Grossvater (mütterlicherseite) von x

(iv) $g(g(x))$ ist (biologische) Grossvater (väterlicherseite) von x

Gilt $f \circ g = g \circ f$? Nein.

b) Geben Sie jeweils (mit Begründung) an, ob die Abbildungen f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.
Lösung. f ist nicht injektiv. Nicht injektivität bedeutet:

$$\neg(\forall x, y \in H : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

d.h.

$$\exists x, y \in H : x \neq y \wedge f(x) = f(y)\,.$$

Und das heisst: es existieren x, y (mit $x \neq y$, also zwei verschiedene Menschen), die die gleiche Mutter haben ($f(x) = f(y)$) (und es ist wahrscheinlich wahr...). Aus dem gleichem Grund ist g nicht injektiv (und $h = (f, g)$ auch nicht).
f ist auch nicht surjektiv, denn es gibt $y \in H$ (die Menschen, die keine Kinder haben), die kein Urbild in H haben. Das heißt, es existiert kein $x \in H$, mit $f(x) = y$ (genau so für g, h).
f, g und h sind deswegen auch nicht bijektiv.

c) Zu beliebigem $y \in H$ und $(a, b) \in F \times M$ gebe man die *Urbildmengen* $f^{-1}(\{y\})$, $g^{-1}(\{y\})$, sowie $h^{-1}(\{(a, b)\})$ beschreibend an. Welchen mengentheoretischen Zusammenhang besitzen diese Mengen?

Lösung. $f^{-1}(\{y\})$ (bzw. $g{-}1(\{y\})$) ist die Menge aller Menschen, die y als biologische Mutter (bzw. als biologischer Vater) haben (das sind also alle Kinder von y). $h^{-1}(\{(a,b)\})$ besteht aus allen biologischen Kindern des Paares (a,b). Da die Kinder von dem Paar (a,b) gleichzeitig a als Mutter und b als Vater haben, gilt:

$$h^{-1}(\{(a,b)\}) = f^{-1}(\{a\}) \cap g^{-1}(\{b\}).$$