1. Übungsblatt zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

Musterlösung von Christoph Spiegel

1. Aufgabe

Es lässt sich eindeutig folgende Wahrheitstabelle rekonstruieren:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$(p \vee \neg q) \to \neg (p \wedge q)$
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
0	1	0	0	0	**1**	**1**
1	0	**1**	1	0	**1**	**1**
1	1	0	1	1	**0**	**0**

2. Aufgabe

a) Wir werden folgende Rechenregeln – und zwar nur diese, d.h. keine Umformungen nach den Regeln der Logik – für die Wahrheitheitsfunktion φ verwenden:

1. $\varphi(\neg a) = 1 - \varphi(a)$
2. $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
3. $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) + \varphi(b) - \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
4. Für die Implikation „$\to$“ leiten wir folgende Regel ab:

$$\begin{aligned}
\varphi(a \to b) &\overset{\text{VL}}{=} \varphi(\neg a \vee b) \overset{3.}{=} \varphi(\neg a) + \varphi(b) - \varphi(\neg a) \cdot \varphi(b) \\
&\overset{1.}{=} (1 - \varphi(a)) + \varphi(b) - (1 - \varphi(a)) \cdot \varphi(b) \\
&= 1 - \varphi(a) + \varphi(a) \cdot \varphi(b)
\end{aligned}$$

Wir wollen nun überprüfen, ob folgende Äquivalenz gilt: $\underbrace{\neg (p \to (q \to r))}_{\text{l.s.}} \Leftrightarrow \underbrace{p \wedge q \wedge r}_{\text{r.s.}}$.

Dafür werden wir die Wahrheitsfunktion φ von der linken und der rechten Seite berechnen und überprüfen, ob Gleichheit vorliegt.

r.s. $\varphi(p \wedge q \wedge r) \overset{2\times(2.)}{=} \varphi(p) \cdot \varphi(q) \cdot \varphi(r)$

l.s. Diese Umformung wird etwas länger als die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
\varphi(\neg (p \to (q \to r))) &\overset{1.}{=} 1 - \varphi(p \to (q \to r)) \\
&\overset{4.}{=} 1 - [1 - \varphi(p) + \varphi(p) \cdot \varphi(q \to r)] \\
&\overset{4.}{=} 1 - [1 - \varphi(p) + \varphi(p) \cdot (1 - \varphi(q) + \varphi(q) \cdot \varphi(r))] \\
&= 1 - [1 - \varphi(p) + \varphi(p) - \varphi(p) \cdot \varphi(q) + \varphi(p) \cdot \varphi(q) \cdot \varphi(r)] \\
&= 1 - 1 + \varphi(p) - \varphi(p) + \varphi(p) \cdot \varphi(q) - \varphi(p) \cdot \varphi(q) \cdot \varphi(r) \\
&= \varphi(p) \cdot \varphi(q) - \varphi(p) \cdot \varphi(q) \cdot \varphi(r)
\end{aligned}$$

Es gilt nun allerdings:

$$\varphi(p) \cdot \varphi(q) \cdot \varphi(r) \overset{\text{i.A.}}{\neq} \varphi(p) \cdot \varphi(q) - \varphi(p) \cdot \varphi(q) \cdot \varphi(r)$$

Man setze dafür z.B. für p und q WAHR ein sowie für r FALSCH und erhält

$$\begin{aligned} \varphi(p = \text{wahr}) \cdot \varphi(q = \text{wahr}) \cdot \varphi(r = \text{falsch}) &= 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \neq 1 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= \varphi(p = \text{wahr}) \cdot \varphi(q = \text{wahr}) \\ &\quad - \varphi(p = \text{wahr}) \cdot \varphi(q = \text{wahr}) \cdot \varphi(r = \text{falsch}) . \end{aligned}$$

Es folgt also: $\neg(p \to (q \to r)) \not\Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$.

3. Aufgabe

a) Wir definieren:

- p bedeutet, dass das Portrait dem Auftraggeber ähnelt.
- e bedeutet, dass der Auftraggeber enttäuscht ist.
- f bedeutet, dass der Künstler enttäuscht ist.
- w bedeutet, dass die Frau sich weigert zu zahlen.

Wir können den Text mit diesen Aussagen folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{array}{l} p \to e \wedge f \\ \neg p \to w \\ w \to e \\ \hline e \end{array}$$

Es ließe sich nun $((p \to e \wedge f) \wedge (\neg p \to w) \wedge (w \to e)) \Rightarrow e$ per Wahrheitstabelle oder Wahrheitsfunktion wie oben überprüfen. Viel einfacher lässt sich jedoch feststellen, dass aus der ersten Zeile direkt $p \to e$ folgt und aus der zweiten und dritten Zeile über den **modus barbara** $\neg p \to e$. Da eine die Aussage p nur WAHR oder FALSCH sein, muss e zwangsläufig wahr sein.

b) Falls p WAHR ist, ist der Künstler unabhängig von der Handlung der Frau enttäuscht (man beachte dafür, dass aus $\neg w$ **nicht** $\neg e$ folgen muss). Darüber hinaus steht Aussage „*Wenn das Portrait dem Auftraggeber nicht ähnelt, wird sich die Frau des Auftraggebers weigern zu zahlen*“ ($\neg p \to w$) logisch im Widerspruch zu „*aber die die Frau des Auftraggebers weigert sich nicht zu zahlen*“ ($\neg w$), da für p FALSCH sowohl w als auch $\neg w$ gelten muss, was nicht möglich ist.

5. Aufgabe

a) Wir definieren folgende Mengen und Aussagen:

- H sei die Menge aller Hörer der Vorlesung „Analysis I (lehramtsbezogen)“ .
- M sei die Menge aller Menschen, die in ihrer Schulzeit Matheunterricht genossen haben.
- $m(x)$ bedeutet, dass x in seiner Schuzeit Mathematikunterricht genossen hat.
- D sei die Menge aller Menschen, die in ihrer Schulzeit Deutschunterricht genossen haben.
- $d(x)$ bedeutet, dass x in seiner Schuzeit Deutschunterricht genossen hat.

Die Aussage lässt sich nun z.B. formulieren als:

$$\forall h \in H: m(h) \vee d(H) \text{ oder } \forall h \in H: h \in M \cup D \text{ oder } H \subseteq M \cup D.$$

Ihre Verneinung wäre „Es existiert (mindestens) ein Hörer der Vorlesung 'Analysis I (lehramtsbezogen)', der in seiner Schulzeit weder Mathematik- noch Deutschunterrichtgenossen hat“, bzw.:

$$\exists h \in H: \neg m(h) \wedge \neg d(H) \text{ oder } \exists h \in H: h \notin M \cup D \text{ oder } H \cap (M \cup D)^c \neq \emptyset.$$

b) Wir definieren folgende Mengen und Aussagen:

- M sei die Menge aller Mathematiker
- I sei die Menge aller intelligenten Menschen.
- $i(x)$ bedeutet, dass x intelligent ist.
- L sei die Menge aller liebenswerten Menschen.
- $l(x)$ bedeutet, dass x liebenswert ist.

Die Frage ist nun, wie man „einige“ logisch auffässt. Falls „einige“ äquivalent zu „mindestens ein“ ist, ist die Formulierung ähnlich einfach wie in **a)**. Wir verwenden jetzt aber den etwas schwierigeren Fall, dass „einige“ äquivalent zu „mindestens zwei“ ist und formulieren die Aussage als:

$$\begin{aligned} & \exists m, k \in M: (i(m) \wedge l(m)) \wedge (i(k) \wedge h(k)) \wedge (m \neq k) \\ \text{oder} \quad & \exists m, k \in M: m, k \in I \cap L \wedge m \neq k \\ \text{oder} \quad & |M \cap (I \cap L)| \geq 2. \end{aligned}$$

Ihre Verneinung wäre „Es existiert maximal ein Mathematiker, der intelligent und liebenswert ist“, bzw.:

$$\begin{aligned} & \exists m \in M \forall k \in M \backslash \{m\}: \neg(i(k) \wedge l(k)) \\ \text{oder} \quad & \exists m \in M \forall k \in M \backslash \{m\}: k \notin I \cap L \\ \text{oder} \quad & 0 \leq |M \cap (I \cap L)| \leq 1. \end{aligned}$$

c) Bei den restlichen Aufgaben lässt sich ganz analog vorgehen.

7. Aufgabe

Es sind die Mengen $A = \{0, 3, 6, 9\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ und $C = \{0, 1, 4, 5, 7\}$ gegeben.

- $A \cap (B \cup C) = \{0, 3, 6, 9\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8, 1, 5, 7\} = \{0, 6\}$.
- $(A \backslash C) \cup (C \backslash A) = \{3, 6, 9\} \cup \{1, 4, 5, 7\} = \{3, 6, 9, 1, 4, 5, 7\}$.
- $(A \cap B) \times C = \{0, 6\} \times \{0, 1, 4, 5, 7\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 4), (0, 5), (0, 7), (6, 0), (6, 1), (6, 4), (6, 5), (6, 7)\}$.
- $A \times (B \cap C) = \{0, 3, 6, 9\} \times \{0, 4\} = \{(0, 0), (0, 4), (3, 0), (3, 4), (6, 0), (6, 4), (9, 0), (9, 4)\}$.
- $\mathcal{P}(C \backslash B) = \mathcal{P}(\{1, 5, 7\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{7\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, \{1, 5, 7\}\}$.