FU Berlin: WiSe 13-14 (Analysis 1 - Lehr.)
Übungsaufgaben – Zettel 10

## Aufgabe 42

Man beweise mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$ : Für jede $n$-elementige Menge $M$ – d.h. $\mathrm{card}(M) = n$ – ist die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen $A \subset M$ für $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig gegeben durch $\binom{n}{k}$.
(*Tipp*: Man beachte, dass der Fall $k > n$ mit eingeschlossen ist, und behandle den Fall $k = 0$ extra. Im Induktionsschritt mache man Gebrauch von der in Aufgabe 40 H (b) bewiesene Eigenschaft der Binomialkoeffizienten. )

*Beweis (Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$)*
**Induktionsanfang ($n = 0$).** Falls $n = 0$, ist $M$ die leere Menge. D.h., dass $M$ genau eine Teilmenge mit 0 Elementen hat ($M$ selbst!), und keine $k$-elementige Teilmenge, für $k > 0$. Also:

$$\text{Anzahl der } k\text{-elementige Teilmenge von } M = \begin{cases} 1 & \text{k=0} \\ 0 & k > 0\,. \end{cases}$$

Es ist aber genau die Definition von $\binom{0}{k}$ ($\binom{0}{0} = 1$ und $\binom{n}{k} = 0$, für $k > n$). Also ist den Induktionsanfang bewiesen.

**Induktionsbehauptung ($n \to n + 1$).** Wir nehmen an, dass die Anzahl der $k$-elementige Teilmenge von einer $n$-elementige Menge $M_n$ gegeben durch $\binom{n}{k}$ ist. Und wir zeigen dass:
die Anzahl der $k$-elementige Teilmenge von einer $(n+1)$-elementige Menge $M_{n+1}$ ist $\binom{n+1}{k}$.
*Beweis.* Sei $M_{n+1}$ eine $(n + 1)$-elementige Menge, also

$$M_{n+1} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}\}$$

(beliebig angeordnete) und sei $A \subset M_{n+1}$ eine $k$-elementige Teilmenge. Wir beachten 3 Fälle:
($k > n + 1$): Im diesem Fall, gibt es keine $k$-elementige Teilmenge von $M_n$ (eine Teilmenge kann nicht mehr Elemente als $M_n$ besizten!), und $0 = \binom{n+1}{k}$ (f ur $k > n$).

($k = 0$): Es gibt nur 1 Telmenge von $M_{n+1}$, die kein Element besiztz (die leere Menge), und $1 = \binom{n+1}{0}$.

$(1 \geq k \geq n+1)$: Wir werden zahlen, wie viele mögliche solche Teilmenge $A$ gibt, mit Hilfe folgendes "Trick". Nehmen wir das Element $a_{n+1}$. Es gibt 2 Möglichkeiten: entweder

$$\text{(i)} \quad a_{n+1} \notin A$$

oder

$$\text{(ii)} \quad a_{n+1} \in A$$

(i) Falls $a_{n+1} \notin A$, ist $A$ eine $k$-elementige Teilmenge der ($n$-elementige!) Menge $M' = M \setminus \{a_{n+1}\}$. Aus der Induktionsvoraussetzung, wissen wir dass es $\binom{n}{k}$ solche Teilmenge gibt.
(ii) Falls $a_{n+1} \in A$, definieren wir die Menge $A' = A \setminus \{a_{n+1}\}$. $A'$ ist eine $(k-1)$-elementige Menge (weil wir ein Element rausgenommen haben) und sie ist eine Teilmenge von $M' = M \setminus \{a_{n+1}\}$. Also ist $A'$ eine $(k-1)$-elementige Teilmenge einer $n$-elementige Menge, und (Induktionsvoraussetzung) es gibt $\binom{n}{k-1}$ solche Teilmenge.
Also, die Anzahl der $k$-elementige Teilmenge kann jetzt berechnet werden, durch:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Fall (i)}} + \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\text{Fall (ii)}} \underbrace{=}_{\text{Aufgabe 40b}} \binom{n+1}{k}.$$

Also ist die Induktionsbehauptung bewiesen. $\square$

## Hornerschema

Seien ein Polynom

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$$

sowie ein $\hat{x} \in \mathbb{R}$ gegebene.
Das Hornerschema (siehe Skript) ist ein Algorithmus für die Berechnung des Wert $f(\hat{x})$ durch die Rekursionvorschrift:

$$\begin{aligned}
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \hat{x} b_n \\
&\dots \\
b_{k-1} &= a_{k-1} + \hat{x} b_k \\
&\dots \\
f(\hat{x}) &= b_0 = a_0 + \hat{x} b_1
\end{aligned} \tag{1}$$

## Aufgabe 44

Für $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig sei das Polynom $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ gegeben durch die folgende Rekursionsvorschrift für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_{k+1} &= \frac{k+1}{k+2} a_k
\end{aligned} \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie konkret die Koeffizienten für das Polynom $f_5$ und ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des Hornerschemas die Funktionswerte $f_5(x)$ an den Stellen $x = m$ für $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und skizzieren Sie – evtl. unter Zuhilfenahme eines Plotters – die Funktion in dem Intervall $[-10, 10] \subset \mathbb{R}$.
**Lösung.**
Die Koeffizienten können durch die Rekursionvorschrift (2) berechnet werden:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3} a_1 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{3}{4} a_2 = \frac{1}{4},$$

$$a_4 = \frac{4}{5} a_3 = \frac{1}{5},\ a_5 = \frac{5}{6} a_4 = \frac{1}{6}$$

also

$$f_5(x) = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{5} x^4 + \frac{1}{6} x^5 .$$

Wir wenden jetzt den Hornerschema (1) für die Berechung den Funktionswerte an. Für $x = 0$

$$b_5 = \frac{1}{6},\ b_4 = \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{5},\ b_3 = \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4},$$

$$b_2 = \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3},\ b_1 = \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2},\ b_0 = 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1 = f(0)$$

Für $x = 1$

$$b_5 = \frac{1}{6},\ b_4 = \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{30},\ b_3 = \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{11}{30} = \frac{37}{60},\ b_2 = \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{37}{60} = \frac{57}{60},$$

$$b_1 = \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{57}{60} = \frac{87}{60},\ b_0 = 1 + 1 \cdot \frac{87}{60} = \frac{147}{60} = f(1) \approx 2.45$$

Für $x = 2$

$$b_5 = \frac{1}{6},\ b_4 = \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{16}{30},\ b_3 = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{16}{30} = \frac{79}{60},\ b_2 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{79}{60} = \frac{89}{30},$$

$$b_1 = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{89}{30} = \frac{193}{30},\ b_0 = 1 + 2 \cdot \frac{193}{30} = \frac{208}{15} = f(2) \approx 13.87$$

...

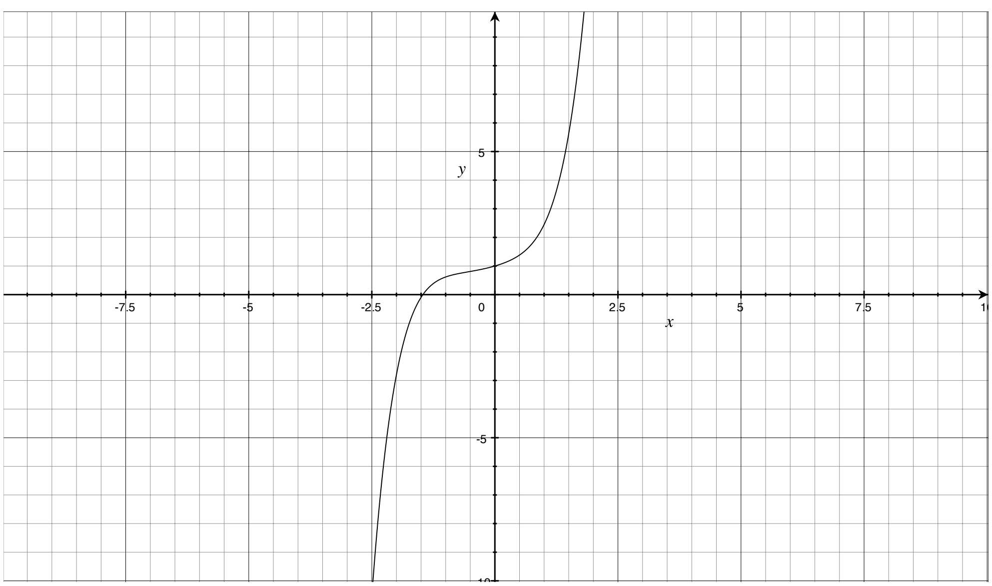


Figure 1: Graph von $f_5(x)$.

(b) Leiten Sie für die Koeffizienten $a_k$ eine geschlossene Darstellung (Folgenvorschrift) her und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Lösung.** Nach der Berechung von $f_5$, vermuten wir: $a_k = \frac{1}{k+1}$.

*Beweis (Induktion über k).*

$(k = 0)$. Aus der Definition, ist $a_0 = 1 = \frac{1}{0+1}$.

$(k \to k+1)$. Nehmen wir an, dass $a_k = \frac{1}{k+1}$ ist. Der Koeffizient $a_{k+1}$ kann jetzt durch die Rekursionvorschrift (2) berechnet werden:

$$a_{k+1} = \underbrace{\frac{k+1}{k+2} a_k =}_{\text{Induktionsvoraussetzung für } a_k} \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2} \, .$$

Also ist die Induktionsbehauptung bewiesen. $\square$

## Aufgabe 45

(a) Mittels vollständiger Induktion beweise man, dass für das Polynom $f_n(x) = (1+x)^n$ gilt:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

*Beweis (Induktion über $n \in \mathbf{N}$).*
$(n = 0)$. Es gilt

$$(1+x)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k \, .$$

$(n \to n+1)$. Nehmen wir an, dass $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ und berechnen wir $(1+x)^{n+1}$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underbrace{=}_{I.V.} (1+x) \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right)$$

d.h.

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \tag{3}$$

Jetzt beachten wir folgende Eigenschaften:

- (i) Aus $\binom{n}{n+1} = 0$ folgt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k - \binom{n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k$$

- (ii) Durch eine Umindizierung hat man

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$$

Also kann die Gleichung (3) als

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$$

umformuliert werden. Weiterhin gilt (den erste Term aus der erste Summe rausnehmen)

$$(1+x)^{n+1} = \binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$$

und (die beide Summe von $k = 1, \ldots, n$ in eine Summe einbringen)

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1=\binom{n+1}{0}} x^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right)}_{\binom{n+1}{k}} x^k \, .$$

Also

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \, .$$

$\square$

(b) Leiten Sie mithilfe von (a) eine konkrete Formel für den Ausdruck $(a+b)^n$ sowie für $(a-b)^n$ und $n \in \mathbb{N}_\mathbf{0}$ her.
**Lösung.**
(Teil 1) Es gilt:

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \underbrace{=}_{\text{Teil (a)}} = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{-k} b^k$$

also

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(Teil 2) Setzen wir $-b$ statt $b$ ein:

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n \underbrace{=}_{\text{Teil 1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k \tag{4}$$

(c) Bestimmen Sie einmal explizit das Polynom $f(x) = (1 + x^2) \cdot (1 - 2x)^5$.
**Lösung.** Aus (4) folgt

$$\begin{aligned}
(1-2x)^5 = &\binom{5}{0} 1^5 (2x)^0 + (-1)\binom{5}{1} 1^4 (2x)^1 + \binom{5}{2} 1^3 (2x)^2 + \\
&(-1)\binom{5}{3} 1^2 (2x)^3 + \binom{5}{4} 1^1 (2x)^4 + (-1)\binom{5}{5} 1^0 (2x)^5 \\
&= 1 - \frac{5!}{1!4!} 2x + \frac{5!}{2!3!} 4x^2 - \frac{5!}{3!2!} 8x^3 + \frac{5!}{4!1!} 16x^4 - \frac{5!}{5!0!} 32x^5 \\
&= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5
\end{aligned}$$

Zuletzt müssen wir das Produkt von zwei Polynome

$$g_1(x) = 1 + x^2 = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k,$$

$$g_2(x) = 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5 = \sum_{k=0}^{5} b_k x^k,$$

berechnen. Wir stellen die beide Polynome als undendliche Summe dar:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \ (a_k = 0, \text{ für } k > 2)$$
$$g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \ (b_k = 0, \text{ für } k > 5)\,.$$

Aus der Produktregel (siehe Skript) kann das Produkt $g_1 \cdot g_2$ als ein Polynom

$$h(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

dargestellt werden, wobei

$$c_k = \sum_{m=0}^{k} a_m b_{n-m}\,.$$

Die Koeffizienten $c_k$ können durch eine Tabelle (siehe Tabelle 1) berechnet werden.

| | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_0$ | $a_0b_0$ | $a_0b_1$ | $a_0b_2$ | $a_0b_3$ | $a_0b_4$ | $a_0b_5$ | $\dots$ |
| $a_1$ | $a_1b_0$ | $a_1b_1$ | $a_1b_2$ | $a_1b_3$ | $a_1b_4$ | $a_1b_5$ | $\dots$ |
| $a_2$ | $a_2b_0$ | $a_2b_1$ | $a_2b_2$ | $a_2b_3$ | $a_2b_4$ | $a_2b_5$ | $\dots$ |
| $a_3$ | $a_3b_0$ | $a_3b_1$ | $a_3b_2$ | $a_3b_3$ | $a_3b_4$ | $a_3b_5$ | $\dots$ |
| $a_4$ | $a_4b_0$ | $a_4b_1$ | $a_4b_2$ | $a_4b_3$ | $a_4b_4$ | $a_4b_5$ | $\dots$ |

| | 1 | $-10$ | 40 | $-80$ | 80 | -32 | 0 | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-10$ | 40 | $-80$ | 80 | $-32$ | $\dots$ | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\dots$ | |
| 1 | 1 | $-10$ | 40 | $-80$ | 80 | $-32$ | $\dots$ | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\dots$ | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\dots$ | |

Table 1: Tabelle für die Koeffizienten eines Produkt von zwei Polynome.

Also

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0 = 1\\
c_1 &= a_0b_1 + \underbrace{a_1b_0}_{=0} = 1\cdot(-10) + 0\cdot 1 = -10\\
c_2 &= a_0b_2 + \underbrace{a_1b_1}_{=0} + a_2b_0 = 40 + 0 + 1 = 41\\
c_3 &= a_0b_3 + \underbrace{a_1b_2}_{=0} + a_2b_1 + \underbrace{a_3b_0}_{=0} = -10 - 80 = -90\\
c_4 &= a_0b_4 + \underbrace{a_1b_3}_{=0} + a_2b_2 + \underbrace{a_3b_1 + a_4b_0}_{=0} = 40 + 80 = 120\\
c_5 &= a_0b_5 + \underbrace{a_1b_4}_{=0} + a_2b_3 + \underbrace{a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_0}_{=0} = -80 - 32 = -112\\
c_6 &= \underbrace{a_0b_6 + a_1b_5}_{=0} + a_2b_4 + \underbrace{a_3b_3 + a_4b_2 + a_5b_1 + a_6b_0}_{=0} = 80\\
c_7 &= \underbrace{a_0b_7 + a_1b_6}_{=0} + a_2b_5 + \underbrace{a_3b_4 + a_4b_3 + a_3b_4 + a_4b_5 + a_5b_2 + a_6b_1 + a_7b_0}_{=0} = -32\\
c_k &= 0,\ \text{für } k \geq 8\,.
\end{aligned}$$

und

$$h(x) = 1 - 10x + 41x^2 - 90x^3 + 120x^4 - 112x^5 + 80x^6 - 32x^7\,.$$