Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik

WS 2013/14
30.01.2014

Gastdozenten:
StR.i.H. A. Gündel-vom Hofe / Dr. A. Caiazzo

Probeklausur zur „Analysis I (lehramtsbezogen)“

Name: ....*Vorname:* ....*Matr.-Nr.:* ….....................

Studiengang (Bachelor Lehramt mit Fachkombination): ....

Es sind *Taschenrechner* zugelassen. Abzugeben sind die Lösungen in *Reinschrift* mit allen *Nebenrechnungen* auf *DIN A4*-Blättern. Mit *Bleistift* oder *in Rot* geschriebene Klausuren werden *nicht gewertet*. Es sind ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt mit Notizen sowie die Vorlesungsunterlagen zulässig, aber keine(!) Formelsammlungen.

Mit 20 von 40 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden. Zu bearbeiten sind 4 der 5 gegebenen Aufgaben, die entsprechend als „bearbeitet“ zu markieren sind.

Unterschrift des Korrektors: ....*Punktzahl:* .... (von 40 Pkten)

---

1. Aufgabe:

Die reelle Folge $(a_n)_{n\in \mathbf{N}_0}$ sei gegeben durch die Folgenvorschrift

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^2}{(k+2)^2}\right) \qquad (n \in \mathbf{N}_0)\ .$$

Leiten Sie für die Koeffizienten a_n eine produktfreie Darstellung her und beweisen Sie anschließend Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbf{N}_0$.

	10,0

2. Aufgabe:

Unter Zuhilfenahme einer geeigneten Tabelle bestimme man die Lösungsmenge $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{R}$ der folgenden Ungleichung und skizziere sie auf der reellen Zahlengeraden:

$$\frac{4 \cdot |x-2|}{(2x-1)} < 1 \quad .$$

	10,0

3. Aufgabe:

Gegeben ist die Abbildung $f: \mathbf{D_f} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = \dfrac{4x^3 - 3}{3x^3 - 2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich $\mathbf{D_f} \subseteq \mathbf{R}$ und zerlegen Sie die Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil.

bitte wenden!!

b) Leiten Sie unter der Voraussetzung der Bijektivität die Abbildungsvorschrift für die Umkehrfunktion $f^{-1} : \boldsymbol{D}_{f^{-1}} \to \boldsymbol{R}$ explizit her. Welchen maximalen Definitionsbereich $\boldsymbol{D}_{f^{-1}}$ besitzt die Umkehrabbildung? Machen Sie auch die Probe, indem Sie konkret nachweisen, dass für alle $x \in \boldsymbol{D}_f$ gilt: $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.

c) Setzen Sie einmal in die Funktion die komplexe Zahl $z = 1 + i$ ein. Welche komplexe Zahl ist dann $w = f(1+i)$? Welchen Real- und Imaginärteil und welchen Betrag hat diese Zahl?

<u>*Hinweis zu (b)*</u>: Dass f bijektiv ist, soll nicht(!) gezeigt werden.

	10,0

4. Aufgabe:

Der Graph einer Funktion $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ bestehe „links“ aus einem Parabelbogen, der durch die Punkte $P = (-3;-2)$, $Q = (1;2)$ sowie $R = (2;1)$ verläuft und „rechts“ aus der anteiligen Geraden, welche durch die Punkte $S = (4;-2)$ und $T = (7;2)$ geht.

a) Stellen Sie erst einmal getrennt die quadratische Funktion in der Scheitelpunktform und die affin lineare Funktion in der auf S bezogenen Punktrichtungsform dar.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Graphenteile und ermitteln Sie daraus die (zusammengesetzte) Abbildungssvorschrift $y = f(x)$ für die Funktion. Skizzieren Sie schließlich ihren Graphen.

c) Skizzieren Sie zusätzlich die Graphen der Funktionen
(i) $g(x) = -f(x-2)$ und (ii) $h(x) = f(-x) + 2$.

	10,0

5. Aufgabe:

a) Bestimmen Sie zu der jeweils angegebenen reellen Zahl $\alpha \in \boldsymbol{R}$, gegeben durch $\alpha = \sqrt[4]{5 - \sqrt{6}}$, zunächst ein ganzzahliges Polynom $f(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$ von möglichst kleinem Grad, so dass α Nullstelle von f ist.

b) Zeigen Sie nun, dass $\alpha \in \boldsymbol{R}$ als Zahl *irrational* sein muss, indem sie $f(x)$ nach allen möglichen rationalen Nullstellen durchsuchen.

	10,0

∗-Aufgabe für Bonuspunkte:

Im folgenden sei M der Individuenbereich der Lehramts-Studenten im Fach Mathematik an der FU Berlin. Außerdem seien die folgenden Aussageformen gegeben:

$p(x)$: *„x ist nicht reich gebettet“* , $q(x)$: *„x studiert lang“* , $r(x,y)$: *„x redet mit y gern“*.

Schreiben Sie die folgenden Aussagen in umgangssprachlicher Formulierung und negieren Sie sie anschließen sowohl formal als auch umgangssprachlich:

a) $(\exists x \in M : p(x)) \vee (\forall x \in M : \neg q(x))$, b) $\forall x \in M\ \exists y \in M : \neg\, r(x,y)$.

	4,0