Freie Universität Berlin WS 2013/14
Fachbereich Mathematik und Informatik 11.04.2014

Gastdozenten:
StR.i.H. A. Gündel-vom Hofe / Dr. A. Caiazzo

Semesternachklausur zur
„Analysis I (lehramtsbezogen)“

Name: ....*Vorname:* ....*Matr.-Nr.:* …......................

Studiengang (Bachelor Lehramt mit Fachkombination): ....

Es sind nicht programmierbare *Taschenrechner* ohne Graphikfunktion zugelassen. Weiterhin sind ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt mit Notizen sowie Vorlesungsunterlagen zugelassen, aber keine(!) Laptops, keine Handys, keine iPads. Abzugeben sind die Lösungen in *Reinschrift* mit allen *Nebenrechnungen* auf *DIN A4*-Blättern. Mit *Bleistift* oder *in Rot* geschriebene Klausuren werden *nicht gewertet*.

Mit 20 von 40 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden. Zu bearbeiten sind 4 der 5 gegebenen Aufgaben, die entsprechend als „bearbeitet“ zu markieren sind.

Unterschrift des Korrektors: ....*Punktzahl:* .... (von 40 Pkten)

---

1. Aufgabe:

Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ sei gegeben durch die Folgenvorschrift

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad (n\in\mathbf{N}_0)\ .$$

a) Berechnen Sie konkret die ersten 3 Glieder der Folge, d.h. für $n = 0, 1, 2$.

b) Zeigen Sie, dass für $n\in\mathbf{N}_0$ beliebig gilt: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$. Folgern Sie daraus: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ ist streng monoton wachsend.

c) Zeigen Sie durch geschicktes Abschätzen, dass für alle $n\in\mathbf{N}_0$ gilt: $a_n < 1$.

d) Finden Sie eine Produktdarstellung für die Folgenglieder $b_n = e^{a_n}$ $(n\in\mathbf{N}_0)$. Wie sieht dann der Quotient $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ aus?

	10,0

2. Aufgabe:

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x)+1}}$.

a) Ermitteln Sie zunächst den maximalen Definitionsbereich D_f für die Funktion $y = f(x)$.

bitte wenden!!

b) Geben Sie die gerade Fortsetzung $\tilde{f}: D_{\tilde{f}} \to \boldsymbol{R}$ von f an. Welches ist der maximale Definitionsbereich $D_{\tilde{f}}$?

c) Unter der Voraussetzung, dass die Funktion f aus Teil (a) streng monoton und damit injektiv ist, leite man die Abbildungsvorschrift für die Umkehrfunktion $f^{-1}: \boldsymbol{D}_{f^{-1}} \to \boldsymbol{R}$ explizit her. Welchen maximalen Definitionsbereich $\boldsymbol{D}_{f^{-1}}$ kann man für f^{-1} angeben?

	10,0

<u>*3. Aufgabe:*</u>

Betrachten Sie die Funktion $f: \boldsymbol{R} \setminus \{-3\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x+3|}$.

a) Für welche $x \in D_f$ gilt: $f(x) > 1$? Bestimmen Sie die zugehörige Lösungsmenge $\boldsymbol{L}$ und skizzieren Sie sie auf der reellen Zahlengeraden.

b) Wie lautet im Intervall $]-3,3[$ der ungerade Anteil von f ?

c) Setzen Sie einmal in die Funktionsvorschrift von f die komplexe Zahl $z = -1 + 2i \in \boldsymbol{C}$ ein. Bestimmen Sie dann von $w = f(-1+2i)$ sowohl den Real- und Imaginärteil als auch ihren Betrag.

	10,0

<u>*4. Aufgabe:*</u>

Der Graph einer Funktion $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ bestehe „links“ aus einer Geraden, die bei $x = -1$ die x-Achse schneidet und durch den Punkt $P = (1;\, 2)$ verläuft, und „rechts“ aus einem Parabelbogen, der – vollständig gezeichnet – seine Schnittpunkte mit der x-Achse bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 7$ besitzt und die y-Achse in $y = -\dfrac{7}{2}$ schneidet.

a) Stellen Sie erst einmal getrennt (i) die affin lineare Funktion $y = g(x)$ in der auf P bezogenen Punktrichtungsform sowie (ii) die quadratische Funktion $y = p(x)$ in der Scheitelpunktform auf.

b) Bestimmen Sie nun den Schnittpunkt der beiden Graphenteile, der *links* vom Scheitelpunkt S der Parabel liegt, und ermitteln Sie daraus die (zusammengesetzte) Abbildungsvorschrift $y = f(x)$ für die Funktion f. Skizzieren Sie schließlich ihren Graphen.

c) Skizzieren Sie zusätzlich die Graphen der Funktionen

(i) $h_1(x) = 2\,f(-x) - 1$ und (ii) $h_2(x) = -f(2x-1)$

und beschreiben Sie, durch welche Verschiebungen, Streckungen (in x- oder y-Richtung) bzw. Spiegelungen diese Graphen aus dem Ausgangsgraphen von f hervorgehen.

<u>*Tipp zu (c)(ii)*</u>: Verwendung der Substitution $u = 2x - 1$ ist sehr hilfreich!!

	10,0

<u>*5. Aufgabe:*</u>

Wir definieren die komplexwertige trigonometrische Funktion $exp : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ mittels der Abbildungsvorschrift $exp(t) = cos(t) + i \cdot sin(t)$, $t \in \mathbf{R}$.

a) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme für die (reellen) trigonometrischen Funktionen *sin* und *cos* durch Rechnung in den komplexen Zahlen, dass für $s,t \in \mathbf{R}$ beliebig gilt: $exp(s+t) = exp(s) \cdot exp(t)$. Das ist die Formel von de Moivre.

b) Beweisen Sie nun mit vollständiger Induktion, dass dann für $t \in \mathbf{R}$ beliebig und alle $n \in \mathbf{N}_0$ gilt: $(*)$ $exp(n\,t) = (exp(t))^n$.

c) Beweisen Sie schließlich, dass die Gleichung $(*)$ auch für alle $t \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{Z}$ gilt, und folgern Sie daraus: $|exp(t)| = 1$ für alle $t \in \mathbf{R}$.

	10,0

<u>*∗-Aufgabe für Bonuspunkte:*</u>

Im folgenden sei M der Individuenbereich der Lehramtsstudierenden an der FU Berlin. Außerdem seien die folgenden Aussageformen gegeben:

$p(x)$: *„x hat sich auf die Analysis-Nachklausur gut vorbereitet“*, $q(x)$: *„x besteht die Nachklausur“*.

Geben Sie für die folgenden Aussagen eine umgangssprachliche Formulierung an und bilden Sie anschließend sowohl formal als auch umgangssprachlich (i) ihre Negation sowie (ii) die zugehörige Kontraposition:

a) $(\forall x \in M : \neg p(x)) \to (\exists x \in M : \neg q(x))$, b) $(\exists x \in M : \neg q(x)) \to (\exists x \in M : \neg p(x))$.

	4,0

NUN VIEL ERFOLG BEIM LÖSEN DER AUFGABEN !

Klausurergebnisse: Siehe Homepage.

Klausur-Einsichtnahme: In der ersten Vorlesungswoche des SoSe 2014. Ort und genaue Zeit wird noch im Rahmen der Klausurergebnisse bzw. auf der Homepage bekannt gegeben.