Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik

WS 2013/14
11.02.2014

Gastdozenten:
StR.i.H. A. Gündel-vom Hofe / Dr. A. Caiazzo

Semesterklausur zur
„Analysis I (lehramtsbezogen)“

Name: ....*Vorname:* ....*Matr.-Nr.:* …....................

Studiengang *(Bachelor Lehramt mit Fachkombination):* ....

Es sind nicht programmierbare *Taschenrechner* ohne Graphikfunktion zugelassen. Weiterhin sind ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt mit Notizen sowie Vorlesungsunterlagen zugelassen, aber keine(!) Laptops, keine Handys, keine iPads. Abzugeben sind die Lösungen in *Reinschrift* mit allen *Nebenrechnungen* auf *DIN A4*-Blättern. Mit *Bleistift* oder *in Rot* geschriebene Klausuren werden *nicht gewertet*.

Mit 20 von 40 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden. Zu bearbeiten sind 4 der 5 gegebenen Aufgaben, die entsprechend als „bearbeitet“ zu markieren sind.

Unterschrift des Korrektors: ....*Punktzahl:* .... (von 40 Pkten)

---

1. Aufgabe:

Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ sei gegeben durch die Folgenvorschrift

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \qquad (n\in\mathbf{N}_0)\ .$$

Leiten Sie für die Koeffizienten a_n eine produktfreie Darstellung her und beweisen Sie anschließend Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion über $n\in\mathbf{N}_0$.

	10,0

2. Aufgabe:

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{|4x+11|}{7-3x}\right)$.

a) Ermitteln Sie zunächst den Definitionsbereich D_f für die Funktion $y = f(x)$.

b) Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme einer geeigneten Tabelle die Menge $\mathbf{L}\subseteq\mathbf{R}$ der reellen Zahlen, für welche folgende Ungleichung erfüllt ist, und skizzieren Sie $\mathbf{L}$ auf der reellen Zahlengeraden.

$$f(x) = \ln\left(\frac{|4x+11|}{7-3x}\right) > 0 \quad .$$

Tipp zu (b): Bestimmen Sie zunächst die kritischen Punkte für den Quotiententerm.

	10,0

bitte wenden!!

3. Aufgabe:

Gegeben ist die Abbildung $f:\,[0,+\infty[\,\to \boldsymbol{R}$ mit $f(x)=e^{p(x)}-1$ mit $p(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

a) Geben Sie die ungerade Fortsetzung $\tilde{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ von f an. Gibt es für die Definition an der Stelle $x_0=0$ dabei Probleme?

b) Leiten Sie unter der Voraussetzung, dass f auf dem Intervall $[0,+\infty[$ injektiv ist, die Abbildungsvorschrift für die Umkehrfunktion $f^{-1}:\,\boldsymbol{D}_{f^{-1}}\to\boldsymbol{R}$ explizit her. Welchen maximalen Definitionsbereich $\boldsymbol{D}_{f^{-1}}$ kann man für f^{-1} angeben? Machen Sie schließlich auch die Probe, indem Sie zeigen, dass für alle $x\in[0,+\infty[$ gilt: $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x$.

c) Setzen Sie in die (komplexe) rationale Funktion $p(z)=\dfrac{z}{z+1}$ die komplexe Zahl $z=1-i$ ein. Welchen Real-, welchen Imaginärteil und welchen Betrag hat die Zahl $w=p(1-i)$?

Hinweis zu (b): Dass f injektiv ist, soll nicht(!) gezeigt werden.

	10,0

4. Aufgabe:

Der Graph einer Funktion $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ bestehe „links“ aus einer Geraden, die durch die beiden Punkte $P=(-5;\,3)$ und $Q=(-2;\,1)$ verläuft, und „rechts“ aus einem Parabelbogen mit Scheitelpunkt $S=(3;\,4)$, auf welchem zusätzlich der Punkt $T=(5;\,-1)$ liegt.

a) Stellen Sie erst einmal getrennt (i) die affin lineare Funktion $y=g(x)$ in der auf P bezogenen Punktrichtungsform sowie (ii) die quadratische Funktion $y=p(x)$ in der Scheitelpunktform auf.

b) Bestimmen Sie nun den Schnittpunkt der beiden Graphenteile, der *links* von S liegt, und ermitteln Sie daraus die (zusammengesetzte) Abbildungsvorschrift $y=f(x)$ für die Funktion f . Skizzieren Sie schließlich ihren Graphen.

c) Skizzieren Sie zusätzlich die Graphen der Funktionen
(i) $h_1(x)=f(-x)-2$ und (ii) $h_2(x)=-f(-x+2)$
und beschreiben Sie, durch welche Verschiebungen bzw. Spiegelungen diese Graphen aus dem Ausgangsgraphen von f hervorgehen.

Tipp zu (c)(ii): Verwendung der Substitution $u=-x+2$ ist sehr hilfreich!!

	10,0

5. Aufgabe:

a) Bestimmen Sie zu den beiden reellen Zahlen $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\beta=\sqrt{2}\cdot\alpha$ jeweils zunächst ein ganzzahliges Polynom $p(x)\in\boldsymbol{Z}[x]$ bzw. $q(x)\in\boldsymbol{Z}[x]$ von möglichst kleinem Grad, so dass $p(\alpha)=0$ bzw. $q(\beta)=0$ ist.

b) Zeigen Sie nun, dass sowohl $\alpha\in\boldsymbol{R}$ als auch ß$\in\boldsymbol{R}$ *irrationale* Zahlen sind, indem sie $p(x)$ und $q(x)$ nach allen möglichen rationalen Nullstellen durchsuchen.

	10,0

$\ast$-Aufgabe für Bonuspunkte:

Im folgenden sei M der Individuenbereich der Lehramtsstudierenden an der FU Berlin. Außerdem seien die folgenden Aussageformen gegeben:

$p(x)$: *„x war fleißig in den Semesterferien“*, $q(x)$: *„x hat einen guten Einstieg ins Wintersemester“*, $r(x,y)$: *„x unterstützt y bei der Klausurvorbereitung“*.

Schreiben Sie die folgenden Aussagen in umgangssprachlicher Formulierung und negieren Sie sie anschließen sowohl formal als auch umgangssprachlich:

a) $(\forall x \in M : p(x)) \to (\forall x \in M : q(x))$,   b) $\exists y \in M\ \forall x \in M : r(x,y)$.

	4,0

NUN VIEL ERFOLG BEIM LÖSEN DER AUFGABEN !

Klausurergebnisse: Siehe Homepage.

Klausur-Einsichtnahme: voraussichtlich Freitag, 21.02.14, nachmittags. Der Ort wird noch im Rahmen der Klausurergebnisse bekannt gegeben.