Vorlesung vom 31.10.2013:

- Cartesisches Produkt von Mengen → Cartesius (lat. für René Descartes) analytische Geometrie!!
- Verallgemeinerte Schnitte / Vereinigungen von Mengen → Prädikatenlogik ($\exists$, $\forall$)
- Abbildungen / Funktionen

1) Cartesisches Produkt (s. Skript)

Falls A, B mit $A \neq \emptyset \neq B$. Dann ist das Cartesische Produkt

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

// Beachte: $(a,b) = (b,a) \Leftrightarrow a = b$

die Menge der geordneten Paare (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Frage der Kombinatorik:

Falls $card(A) = n(A) = r$, $card(B) = n(B) = s$ ist, wieviele

Kardinalzahl

geordnete Paare $(a,b) \in A \times B$ kann man dann bilden?

Antwort: $card(A \times B) = r \cdot s = card(A) \cdot card(B)$ // Aha! Daher „Produkt"!

Daher hat man aus der Arithmetik als Kurzschreibweise für den Fall $A = B$ die Potenzschreibweise übernommen:

$$A^2 = A \times A = \{(a,b) : a, b \in A\}$$

$$A^3 = A \times A \times A = \{\underbrace{(a,b,c)}_{\text{Tripel}} : a, b, c \in A\}$$

z.B.: $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} = \{\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{n\text{-tupel}} : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$

Koordinaten des Punktes / Vektors

$\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)$

Falls man geordnete Paare mittels

$\langle a,b\rangle := \{\{a\},\{a,b\}\}$ ← Etage 2 im „Mengengebäude"

definiert, wie sieht dann $\langle a,a\rangle$ aus, d.h. der Fall $a=b$?

$$\langle a,a\rangle = \{\{a\},\underbrace{\{a,a\}}_{=\{a\}}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$$

eine 1-elementige Menge mit dem „Element" $\{a\}$

Elementarmenge!

Beispiel eines Cartesischen Produkts als Teilmenge des $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

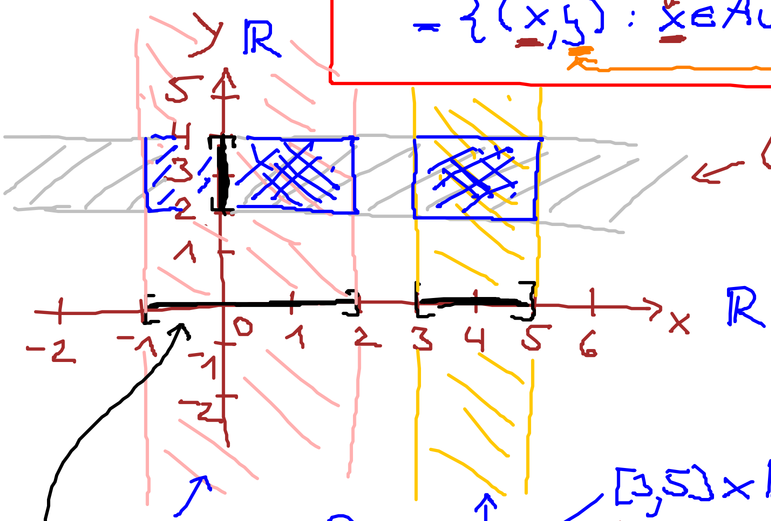
$A=[-1,2]:=\{x\in\mathbb{R}:\ -1\le x\le 2\}$,

$B=[3,5]:=\{x\in\mathbb{R}:\ 3\le x\le 5\}$,

$C=[2,4]:=\{x\in\mathbb{R}:\ 2\le x\le 4\}$

Gesucht:
$$\boxed{\begin{aligned} M &= (A\cup B)\times C \\ &= \{(x,y) : x\in A\cup B,\ y\in C\}\end{aligned}}$$
„und"

„$\cup$": vereinigt mit



(x,y) mit $y\in[2,4]$: $\mathbb{R}\times\overbrace{[2,4]}^{C}$

$= (A\cup B)\times C$

$= (A\times C)\cup(B\times C)$

$= [(A\times\mathbb{R})\cap(\mathbb{R}\times C)]\cup[(B\times\mathbb{R})\cap(\mathbb{R}\times C)]$

$\underbrace{[3,5]}_{B}\times\mathbb{R}$

$\underbrace{[-1,2]}_{A}\times\mathbb{R}$

Wie beschreibe ich das eindimensionale Intervall $[-1,2]$ als Teilmenge im $\mathbb{R}^2$?

$[-1,2]\subseteq\mathbb{R}$ ↷ $\underbrace{[-1,2]\times\{0\}}\subseteq\mathbb{R}^2$

„Einbettung"

$\{(x,y): -1\le x\le 2,\ y=0\}$
$=\{(x,0): x\in[-1,2]\}$

ENDE der Vorlesung!