Vorlesung vom 30.01.2014:

- Komplexe Zahlen
- Irrationalität von reellen Zahlen (genauer: algebraischen Zahlen)

1) $\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ Körper der komplexen Zahlen, wobei

$\boxed{i^2 = -1}$, d.h. $z = i$ ist Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 + 1$.

Genau genommen ist $i = (0,1) \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wobei in $\mathbb{K}$ gilt:

$$(*) \quad \boxed{\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d), \\ (a,b) * (c,d) &:= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}}$$

Siehe Aufgabe 48!

Warum die Verknüpfung so definiert wurde, wird nachträglich klar, wenn man die Schreibweise $z = a + ib$, $w = c + id$ benutzt:

$$(1) \quad z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) = u + iv$$

$$\hat{=} (\underbrace{a+c}_{u}, \underbrace{b+d}_{v})$$

$$(2) \quad z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + \boxed{i^2}\,bd \qquad i^2 = -1 \,!!$$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc) = u + iv$$

$$\hat{=} (\underbrace{ac - bd}_{u}, \underbrace{ad + bc}_{v \,\in \mathbb{R}})$$

Wir rechnen ein wenig!

Beachte: $z = a + ib \;\hat{=}\; (a,b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, dann heißt $a =: \mathrm{Re}(z)$ der Realteil von z,

und $\underbrace{b =: \mathrm{Im}(z)}_{\in \mathbb{R}}$ der Imaginärteil von z.

Merke: Der Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = b$ ist der Koeffizient, der bei der imaginären Einheit $i \; (= \sqrt{-1})$ steht. Er ist selbst eine reelle Zahl

Beispiel: (49) (i) $z = \frac{2i}{1+i} = a+ib$ // Trick: „Erweitere" mit 3. Binom.!!

$$z = \frac{2i\,(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i(1-i)}{1-i^2} = \frac{2i(1-i)}{1-(-1)} = \frac{2i-2i^2}{1+1} = \frac{+2+2i}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(1+i)}{\cancel{2}} = 1+i$$

($i^2 = -1$)

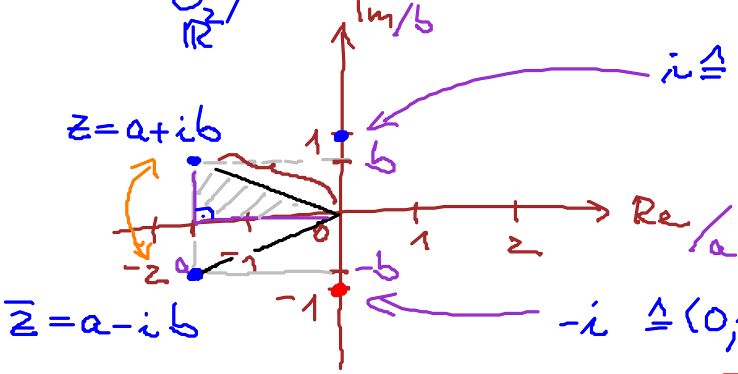
Wegen ihrer Bedeutung erhält die zu $z=a+ib$ gehörende „3. Binom"-Zahl eine besondere Bezeichnung plus Namen:

$\boxed{\bar z = a-ib}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl

Es gilt: $z\cdot\bar z = (a+ib)(a-ib) \overset{\text{3. Binom}}{=} a^2 - i^2 b^2 = a^2+b^2$

$i^2 = -1$ — Pythagoras?

Gaußsche Zahlenebene: $\mathbb{R}^2$



$i \mathrel{\hat=} (0,1)$

$-i \mathrel{\hat=} (0,-1) = -1\cdot(0,1)$

Geometrische Interpretation: Der „Punkt" $\bar z$ entsteht aus z durch Spiegeln an der Realteilachse.

Insbesondere: $\boxed{\bar{\bar z} = \overline{(a+ib)} = \overline{(a-ib)} = a+ib = z}$

Nun erhält $\sqrt{z\cdot\bar z} = \sqrt{a^2+b^2}$ die geometrische Bedeutung der „Länge des Vektors" $z = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bzw. des „Abstands" des „Punktes" $z=(a,b)$ vom Koordinatenursprung $z_0=(0,0)$.

Beispiel: (i) $z = \frac{2i}{1+i} = 1+i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 1,\ \mathrm{Im}(z) = 1,\ |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$

$\bar z = 1-i \in \mathbb{C}$

(ii) $z = \frac{10-5i}{1+2i} = \frac{(10-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{\cancel{10}-20i-5i+\cancel{10i^2}}{1-(2i)^2} = \frac{-25i}{5} = -5i$

$(2i)^2 = 4i^2 = -4$, $i^2 = -1$

$\Longrightarrow$ $z = a + ib$ mit $\underline{a = \mathrm{Re}(z) = 0}$, $\underline{b = \mathrm{Im}(z) = -5} \in \mathbb{R}$!!

$\bar{z} = a - ib = 5i$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0^2+(-5)^2} = \sqrt{5^2} = 5$

(iii) $z = \sum_{k=0}^{26} i^k = i^0 + i^1 + i^2 + \ldots + i^{26}$ // $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$= \frac{1-i^{27}}{1-i} = \frac{1-i^{64+3}}{1-i} \overset{(*)}{=} \frac{1-(-i)}{1-i}$ geometrische Summe !

geometrische Summe für $x = i \in \mathbb{C}$

Was ist mit der Potenz i^n für $z = i$ los?

(*)

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = \underbrace{i^2}_{-1} \cdot i = -i = \bar{i}$, $i^4 = (i^2)^2 = \underbrace{(-1)^2}_{=+1}$

$i^5 = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$, $i^7 = -i$ usw.

Also, $i^{27} = (\underbrace{i^4}_{+1})^6 \cdot i^3 = \underbrace{1^6}_{1} \cdot (-i) = -i$ // Beachte: $27 = 6 \cdot 4 + 3$

$z = \sum_{k=0}^{26} i^k = \frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$ ($i^2 = -1$)

$\Longrightarrow$ $a = \mathrm{Re}(z) = 0$, $b = \mathrm{Im}(z) = 1$, $\bar{z} = -i$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

Zu Dienstag Hausaufgaben H48, H49 (iv) + (v) !

Zu Donnerstag: 50 H(c) ; Beispiel dazu am Dienstag !!

ENDE der Vorlesung !!