Vorlesung vom 28.11.2013:

- Bijektivität und Umkehrfunktion/-abbildung
- Abzählbarkeit / Überabzählbarkeit (bzw. Unendlichkeit)

1) Definition:

a) Eine Abb. $f: A \to B$ heißt injektiv, falls gilt:

$$\boxed{\forall x, x' \in A: \; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall x, x' \in A: \; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}$$

wird für den konkreten Nachweis von Injektivität genutzt

„Kontraposition" zu $A \to B$: $\neg B \to \neg A$

Bemerkung: $f: A \to B$ ist injektiv $\Leftrightarrow$

$$\forall y \in B: \; \underbrace{f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}}_{\text{Urbild von } y \text{ unter } f} = \underbrace{\{x\}}_{\text{einelementig}} \vee \underbrace{f^{-1}(y) = \emptyset}_{\text{leer}}$$

D.h.: Jedes $y \in B$ besitzt höchstens ein Urbild $x \in A$.

b) $f: A \to B$ heißt surjektiv, falls gilt:

$$\boxed{\forall y \in B: \; f^{-1}(y) \neq \emptyset} \quad \text{bzw.:} \quad \boxed{f(A) = \{f(x) : x \in A\} \overset{!}{=} B}$$

D.h.: Jedes $y \in B$ besitzt mindestens ein Urbild $x \in A$

c) Injektivität plus Surjektivität ergibt <u>Bijektivität</u>. Dann gilt:

|| Jedes $y \in B$ besitzt <u>genau ein</u> $x \in A$, so dass gilt: $y = f(x)$ ||

Das ist eine <u>Zuordnungsvorschrift</u> für eine Abbildung/Funktion

$f^{-1}: B \to A$ mit $\boxed{x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)}$ (*) wird <u>Umkehrabbildung</u>/<u>-funktion</u> von f genannt.

$x = f^{-1}(y)$ eingesetzt in $y = f(x)$, ergibt: $\boxed{y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y)}$

$= id_B(y)$

Also, da dies für jedes $y \in B$ gilt: $\boxed{id = f \circ f^{-1}}$ f macht quasi f^{-1} „rückgängig"

<u>Analog</u> $y = f(x)$ eingesetzt in $x = f^{-1}(y)$:

$\forall x \in A$: $\boxed{x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x)} \Rightarrow \boxed{id_A = f^{-1} \circ f}$

<u>Beachte</u>: $f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}$!!

f^{-1} verhält sich zu f wie ein Inverses in Bezug auf die Komposition/Verknüpfung „$\circ$" von Abbildungen,

id als Identitätsfunktion wie ein Neutrales in Bezug auf „$\circ$".

$id(x) = x$ mit Bezug auf den Definitionsbereich $M = D_{id}$.
$\quad _M$

<u>Beispiel</u> („Sammelkiste" der Schulmathematik):

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv,

$$\boxed{\begin{aligned} f: [0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}}$$

ist bijektiv. Wir können dann die Wurzelfkt. als Umkehrfkt. f^{-1} zu f definieren:

$$\begin{aligned} f^{-1}: [0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ x &\longmapsto y = f^{-1}(x) =: \sqrt{x} \end{aligned}$$

mit $\boxed{y = \sqrt{x} \geq 0 \iff x = y^2 = f(y)}$

Anders:

$y = \sqrt{a}$ ist die positive Lösung der Gleichung $a = y^2$ für $a \in [0,+\infty[$ beliebig gegeben.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = \boxed{(\sqrt{x})^2 = id(x) = x} \quad (x \geq 0)$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = f^{-1}(f(y)) = f^{-1}(y^2) = \boxed{\sqrt{y^2} = id(y) = y}$$

Ebenso:

$\exp = f: \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, $y = f(x) = e^x$ // Exponentialfunktion!

ist bijektiv. Die zugehörige Umkehrfunktion

„Potenzfkt"

$$f^{-1}:]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x = f^{-1}(y) \iff \boxed{y = f(x) = e^x} > 0$$

heißt natürlicher Logarithmus, in Zeichen:

$$\boxed{x = \ln(y) \iff y = \exp(x) = e^x}$$

Also:

logarithmus naturalis

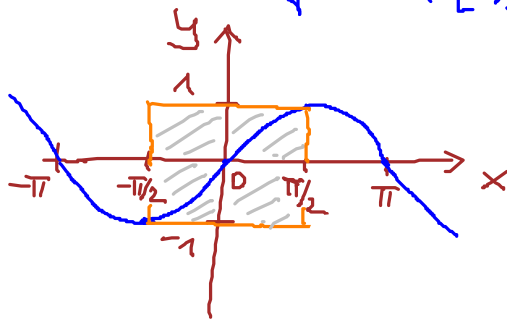
$$\boxed{(f \circ f^{-1})(x)} = f(f^{-1}(x)) = f(\ln(x)) = \exp(\ln(x)) = \boxed{e^{\ln(x)} \overset{!}{=} x} = id(x)_{]0,+\infty[}$$

$$\boxed{(f^{-1} \circ f)(x)} = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \boxed{\ln(e^x) \overset{!}{=} x} = id_{\mathbb{R}}(x)$$

Ebenso:

$f=\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)=\sin(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv.

<u>Aber</u>: $f=\sin:[-\pi/2,\ \pi/2]\to[-1,+1]$ ist bijektiv



sin besitzt nun eine Umkehrfunktion

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}:[-1,+1]\to[-\pi/2,\ \pi/2] \\ y=f^{-1}(x)=\quad x=f(y)=\sin y \end{array}}$$

, <u>Arcus Sinus</u> genannt.

$$f^{-1}(x)=\boxed{\arcsin(x)=y \iff x=\sin y}$$

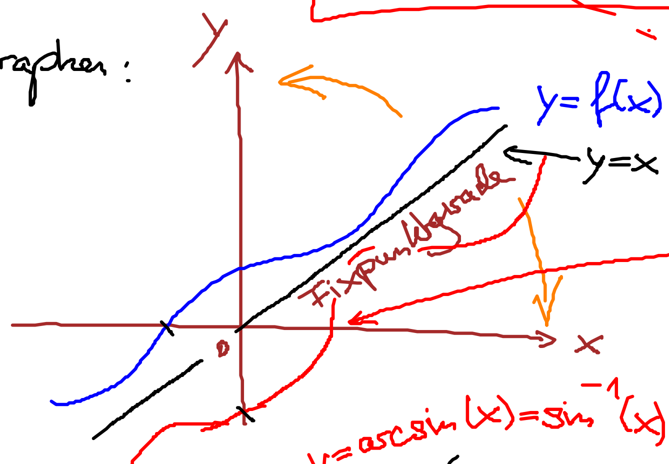
Wie steht's um den Zusammenhang der beiden Graphen von f und f^{-1}?

Schlüssel ist

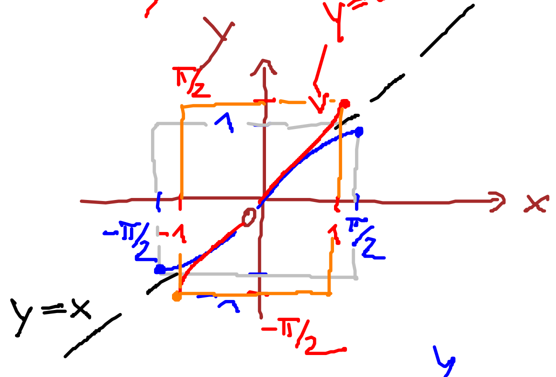
$$\boxed{y=f^{-1}(x)\iff x=f(y)}$$

„vertauschen"!!

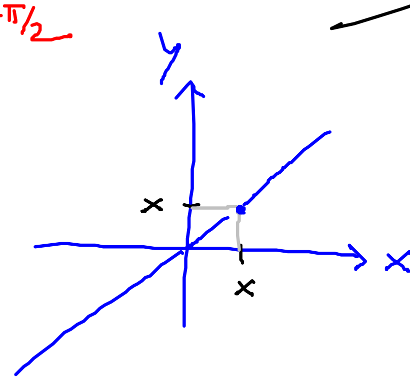
Im Graphen:



Vertauschung durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y=x=\mathrm{id}(x)$



ENDE der Vorlesung!!



$y=f(x)=x$

$$\Gamma_{id}=\{(x,y):x\in D_f,\ y=f(x)\}$$
$$=\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$$