Vorlesung vom 28.01.2014:

- Polynome → Hornerschema, Polynomdivision
- Komplexe Zahlen

1) Zu den komplexen Zahlen bzw. „Körpererweiterungen":

H(48) Einführung der komplexen Zahlen über

$\mathbb{C} = (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, *)$ mit

$(a,b) + (c,d) := (\underbrace{a+c}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{b+d}_{\in\mathbb{R}})$; (*) $\boxed{(a,b)*(c,d) := (\underbrace{ac-bd}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{ad+bc}_{\in\mathbb{R}})}$

Verknüpfung in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Aus LinA weiß man (oder wird man sehen): $(\mathbb{R}^2, +)$ ist eine abelsche (=kommutative) Gruppe und Grundlage für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Dazu kommt nur noch die skalare Multiplikation

$$\lambda\cdot(a,b) := (\lambda a, \lambda b) \quad \text{für } \lambda\in\mathbb{R},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

Neu interpretiert in $\mathbb{C}$: siehe oben!

$$\underset{\in\mathbb{R}}{\lambda}\cdot(a,b) = (\underbrace{\lambda, 0}_{=\varphi(\lambda)})*(a,b) \overset{(*)}{=} (\lambda a - 0b, \lambda b + 0a) = (\lambda a, \lambda b)$$

Analogbeispiel ist Übungsaufgabe Ü(47):

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, +, *)$ mit

$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$; $(a,b)*(c,d) := (\underbrace{ac+2bd}_{\in\mathbb{Q}}, \underbrace{ad+bc}_{\in\mathbb{Q}})$

„Wichtig" sind die Gesetze der Multiplikation $*$:

z.B.: Assoziativgesetz

$$[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (ac+2bd, ad+bc)*(e,f)$$
$$= ((ac+2bd)e + 2\cdot(ad+bc)f, (ac+2bd)\cdot f + (ad+bc)\cdot e)$$
$$= (ace+2bde+2adf+2bcf, acf+2bdf+ade+bce)$$
$$= (ace+2(adf+bcf+bde), acf+ade+bce+2bdf)$$

Andererseits:

$$(a,b)*[(c,d)*(e,f)] = (a,b)*(ce+2df, cf+de)$$
$$= (a(ce+2df)+2\cdot b(cf+de), a(cf+de)+b(ce+2df))$$
$$= (ace+2adf+2bcf+2bde, acf+ade+bce+2bdf)$$

!! $=$

Weitere Gesetze, die nachzuweisen sind:

Kommutativgesetz bezügl. „$*$“, Existenz einer Eins zu „$*$“

z.z.: $(1,0)*(a,b) = (a,b)$ für alle $(a,b)\in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $\quad 1 = \varphi(1) = (1,0)\ (\in \mathbb{Q})$

Distributivgesetz: $(a,b)*[(c,d)+(e,f)] = (a,b)*(c,d)+(a,b)*(e,f)$

Bleibt die Existenz von Inversen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

$(a,b) \neq (0,0)$: Gesucht ist $(x,y) = (a,b)^{-1}$ mit

Nullelement!

Symbol für Inverses

zu lösende Gleichung!!

$$\boxed{(a,b)*(x,y) = (1,0)}\ (=1)$$

$\Leftrightarrow (ax+2by, ay+bx) \overset{!}{=} (1,0)$

Gleichheit von geordneten Paaren!! $\Leftrightarrow$

$(1)\; ax+2by = 1$

$(2)\; bx+ay = 0$

$\Leftrightarrow$ LinA (LGS) $\boxed{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$

$\Leftrightarrow A\cdot\vec{x} = \vec{c}$

Mit Gaußverfahren:

$$[A|\vec{c}\,] = \left[\begin{array}{cc|c} a & 2b & 1 \\ b & a & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{a}\cdot(\mathrm{I})} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2b/a & 1/a \\ b & a & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(\mathrm{II})-b\,(\mathrm{I})}$$

Systemmatrix = erweiterte Koeffizientenmatrix

„O.B.d.A." Sei $a \neq 0$

??

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2b/a & 1/a \\ 0 & a-\frac{2b^2}{a} & -b/a \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{a}{a^2-2b^2}\cdot(\mathrm{II})]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2b/a & 1/a \\ \underline{\underline{0}} & 1 & \frac{\cancel{a}^{\,1}}{a^2-2b^2}\cdot\left(-b/\cancel{a}_{\,1}\right) \end{array}\right]$$

$a^2-2b^2 \neq 0$, da

sonst:

$a^2 = 2b^2$

$\Leftrightarrow 2 = (a/b)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} = (a/b) \in \mathbb{Q}$ ↯

$$a - \frac{2b^2}{a} = \frac{a^2-2b^2}{a} \neq 0$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I})-\frac{2b}{a}\cdot(\mathrm{II})} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{a} - \frac{2b}{a}\cdot\left(\frac{-b}{a^2-2b^2}\right) \\ 0 & 1 & -\frac{b}{a^2-2b^2} \end{array}\right] \end{array}$$

Dann:

$$\underset{(\mathrm{II})}{y} = \frac{-b}{a^2-2b^2}, \quad x = \frac{1\cdot(a^2-2b^2)+2b^2}{a(a^2-2b^2)} = \frac{a^{\cancel{2}}}{{}_1\cancel{a}(a^2-2b^2)} \qquad \underbrace{a^2-2b^2}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{(a,b)^{-1} = (x,y) = \Big(\underbrace{\frac{a}{a^2-2b^2}}_{\in\mathbb{Q}}, \underbrace{\frac{-b}{a^2-2b^2}}_{\in\mathbb{Q}}\Big)} \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$$

Probe:

$$(a,b) * \left(\frac{a}{a^2-2b^2}, \frac{-b}{a^2-2b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2-2b^2} + 2\cdot b\cdot\frac{-b}{a^2-2b^2}, \frac{-ab}{a^2-2b^2} + \frac{ab}{a^2-2b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\cancel{a^2-2b^2}}{\cancel{a^2-2b^2}}, \frac{\cancel{-ab+ab}}{a^2-2b^2}\right) = (1,0) \checkmark$$

Notiz zu Polynomen:

Dank „i" mit $i^2 = -1$ als neuer Zahl können wir quadratische Gleichungen immer lösen, d.h. wir erhalten in $\mathbb{C}$ stets Nullstellen für quadratische reelle Polynome $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$.

Ring aller Polynome mit reellen Koeffizienten.

„Lösungsformel" (ermittelt aus geschickter „quadratischer Ergänzung"):

$$\boxed{z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{mit } \Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$$

Schreibweise für komplexe Zahlen!

3 Fälle:
(i) $\Delta > 0$: $z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}$, $z_1 \neq z_2$

(ii) $\Delta = 0$: $z_1 = z_2 = -b/2a \in \mathbb{R}$ Doppel-Lösung!!

(iii) $\Delta < 0$: $z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}\, i}{2a}$

Daraus leitet sich die Probe nach Vieta ab:

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \implies \boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ \text{(ii)} & z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{array}}$$

Gilt sowohl für reelle als auch komplexe Lösungen!

Nachtrag zu Operationen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

$(a,b) \mathrel{\hat{=}} a + b\sqrt{2}$. Dann: $(a,b) + (c,d) = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})$

$(c,d) \mathrel{\hat{=}} c + d\sqrt{2}$.

$= (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \mathrel{\hat{=}} (a+c, b+d)$

$$\boxed{(a,b) * (c,d)} = (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2})$$
$$= ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + bd\sqrt{2}^2$$
$$= \underbrace{(ac + 2bd)}_{\sqrt{2}\text{-freier Anteil}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\text{zu } \sqrt{2} \text{ gehöriger Anteil}} \cdot \sqrt{2} \mathrel{\hat{=}} (ac + 2bd, ad + bc)$$

Herleitung der abstrakten „Verknüpfungen"!!

ENDE der Vorlesung!!