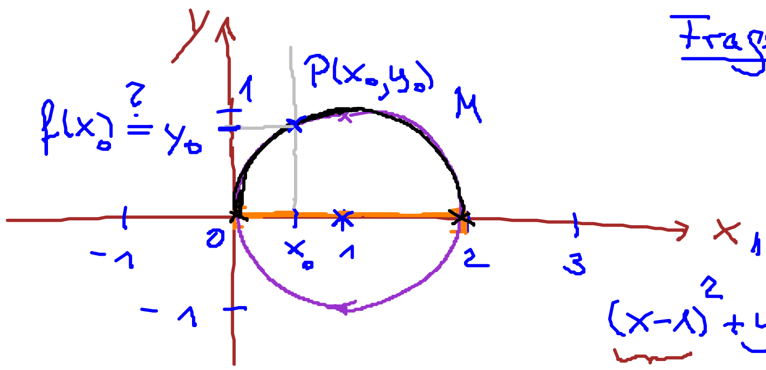
Vorlesung vom 26.11.2013

Vom Graphen zur Funktionsvorschrift:

Beispiel: Betrachte im Skript die Punktmenge

$$\boxed{M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ (x-1)^2+y^2=1^2\}}$$

Kreis(linie) mit Mittelpunkt $(x_0,y_0)=(1,0)$ und Radius $r=1$.



Frage: Wie „beschreibe" ich den oberen Halbkreis als Funktion?

„Bastelecke":

$$\underbrace{(x-1)^2}_{=x^2-2x+1}+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=\overbrace{1-\underbrace{(x-1)^2}_{=x^2-2x+1}}^{\ge 0\ !!}=-x^2+2x$$

$$\overset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow} \underbrace{\sqrt{y^2}}_{\ge 0\ !!}=|y|=\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{2x-x^2}$$

„+" oder „−" ?

$$\overset{y\ge 0}{\Longrightarrow} \boxed{y=\sqrt{2x-x^2}=f_1(x),\quad f_1:[0,2]\to\mathbb{R}}$$

Ist eindeutig eine Funktion!

Unterer Halbkreis ist Graph der Funktion

$$\boxed{f_2:[0,2]\to\mathbb{R},\quad y=f_2(x)=-\sqrt{2x-x^2}}=-f_1(x)$$

Zur Komposition von Abbildungen:

Die Komposition $h=f\circ g$ – sprich: „f nach g" – für zwei Abbildungen $f:A\to B$, $g:C\to D$ macht nur Sinn, wenn gilt:

$\underbrace{g(C)}_{\text{Bild von } g} = \{y = g(x) : x \in C\} \subseteq A = D_f$!!

Dann: $h(x) = (f \circ g)(x) := f(g(x))$. // Heißt auch Verkettung!

Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$ erhält man:

$$h_1(x) = f(g(x)) = f(\underbrace{x+1}_{y}) = \underbrace{(x+1)}_{y}{}^2 = x^2 + 2x + 1$$

$f(y) = y^2$

$$h_2(x) = (g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{=x^2}) = g(x^2) = x^2 + 1$$

„äußere" Fkt.; innere Funktion

$g(y) = y+1$

<u>Bemerkung</u>: Die <u>Komposition</u> von Abbildungen ist assoziativ,
(„$\circ$") „Verkettung"

d.h. es gilt: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Denn für <u>jedes</u> beliebige $x \in D_h$ ist

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(\underbrace{h(x)}_{y}) = f(\underbrace{g(h(x))}_{= (g \circ h)(x)})$$

$$= f((g \circ h)(x)) = [f \circ (g \circ h)](x)$$

Zur <u>Injektivität</u>,

$$\boxed{\forall x, x' \in A : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')}$$ Definition injektiv

$(A \Rightarrow B)$ $\qquad \neg(A \Rightarrow B)$

<u>Verneinung</u>: $\neg(\forall x, x' \in A : \ldots) \Leftrightarrow \exists x, x' \in A : \neg(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$

$$\Leftrightarrow \boxed{\exists x, x' \in A : \underbrace{(x \neq x')}_{A} \wedge \underbrace{f(x) = f(x')}_{\neg B}}$$ Gegenbeispiel

Zur <u>Surjektivität</u>:

$$\boxed{\forall y \in B : f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset}$$ Definition surjektiv

Verneinung: $\neg\left(\forall y \in B : \underbrace{f^{-1}(y)}_{A} \neq \emptyset\right) \Longleftrightarrow \boxed{\exists y \in B : f^{-1}(y) = \emptyset}$ $\exists A$

Urbild von y unter f

Gegenbeispiel

Bijektiv = injektiv plus surjektiv

$\Longrightarrow$ Definition einer Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ durch

$$\boxed{y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y)} \quad = f(\underbrace{f^{-1}(x)}_{=y}) = \mathrm{id}_B(x)$$

ENDE der Vorlesung !!!