Vorlesung vom 21.11.2013

· Abbildungen / Funktionen !!

Also: Eine Abbildung $f: A \to B$ ist eine Zuordnungsvorschrift – beschrieben zumeist in Form einer Gleichung $\boxed{y = f(x)}$ –, durch welche jedem $x \in A$ eindeutig ein $y \in B$ zugeordnet wird.
(genau ein)

Falls $\tilde{A} \subsetneq A$ eine echte Teilmenge von $D_f = A$ – also Definitionsbereich eingeschränkt –, dann heißt die Abbildung

$$\boxed{\begin{aligned} f|_{\tilde{A}} : \tilde{A} &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}}$$

Sprich: „f eingeschränkt auf $\tilde{A}$"

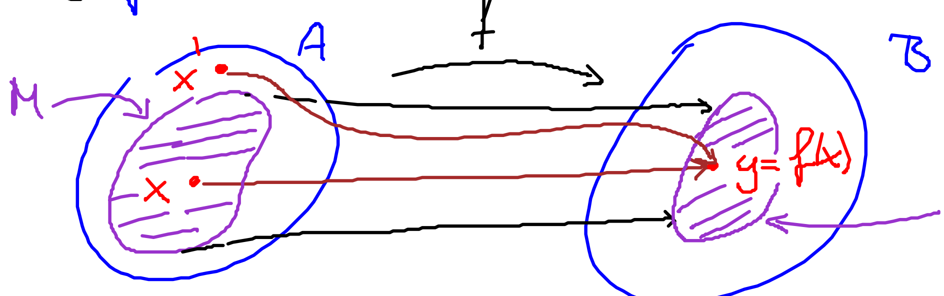
die Einschränkung von f auf $\tilde{A}$.

Wichtig, wenn es um die Frage der Umkehrbarkeit einer Abb., d.h. um die Existenz der „inversen" Fkt. bzw. Umkehrfkt. eines Abb./Funktion $f: A \to B$, $y = f(x)$.

z.B.: $\boxed{\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) = x^2 \end{aligned}} \Longrightarrow \begin{aligned} f|_{[0,+\infty[} : \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = x^2 \end{aligned}$

$\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$

Zu den Begriffen Bild und Urbild einer Menge unter einer Abbildung $f: A \to B$:



$f(M) = \{f(x) \in B : x \in M\}$

Man nennt speziell $f(A)$ das (komplett) Bild von f.

Z.B.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

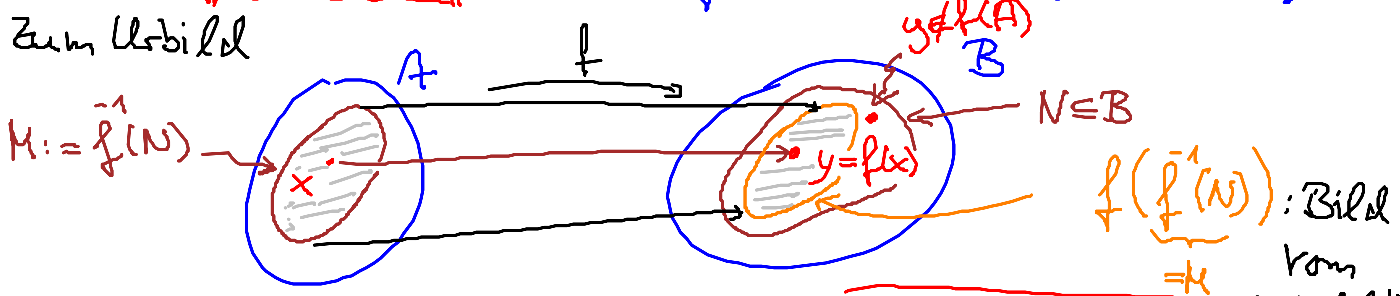
$f(\mathbb{R})=\{y=f(x)=x^2 : x\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty[=\mathbb{R}_0^+$; z.B.: $-1\notin f(\mathbb{R})$

$f(0)=0^2=0\in f(\mathbb{R})$

$=\{y=f(x)=x^2 : \overbrace{x\in\mathbb{R}, x\geq 0}^{x\in M}\}$

$M=[0,+\infty[=\mathbb{R}_0^+\subseteq\mathbb{R}=D_f \Rightarrow f(M)=f([0,+\infty[)=[0,+\infty[$

Zum Urbild



(*) $\boxed{f(f^{-1}(N))\subseteq N\subseteq B}$

Achtung: Es kann sein, dass $N\setminus f(A)\neq\emptyset$ ist.

Z.B.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

$f^{-1}(\underbrace{[-2,-1[}_{N\subseteq\mathbb{R}})=\{x\in\mathbb{R}=D_f : y=f(x)\in[-2,-1[\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: -2\leq x^2<-1\}=\emptyset$

$f^{-1}([-1,1[)=\{x\in\mathbb{R} : -1\leq \underbrace{x^2}_{f(x)}<1\}=]-1,1[\subseteq D_f$

Beachte: $x^2<1 \Rightarrow \sqrt{x^2}=|x|<1 \Rightarrow |x-0|<1$

$\Rightarrow x\in]0-1,0+1[=]-1,1[$

Dann: (*) $f(\underbrace{f^{-1}([-1,1[)}_{=]-1,1[})=f(]-1,1[)=$

Bild vom Urbild

$=\{y=f(x)=x^2 : -1<x^2<1\}$

$=[0,1[\subsetneq[-1,1[=N$

Allgemein: $[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}\Rightarrow a,b\in[a,b]$

$]a,b[:=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}\Rightarrow a,b\notin]a,b[$

ENDE der Vorlesung!!