Vorlesung vom 21.01.2014:

• Polynome

Vorweg definieren wir den Begriff der Folge in einer Menge $M \neq \emptyset$.

Def: Unter einer Folge in M versteht man eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to M$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutiges $a \in M$ zuordnet.

In Zeichen: $\boxed{a = f(n) =: a_n}$ n: Folgenindex!

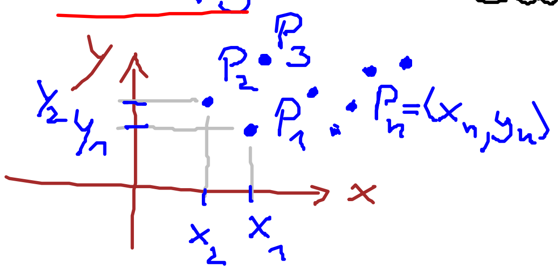
Statt $f: \mathbb{N} \to M$ schreibt man auch kurz $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$

Auch: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Beispiele: $M = \mathbb{R} \Rightarrow a_n = f(n) \in \mathbb{R}$, d.h. (a_n) ist reelle Folge

$M = \mathbb{Q} \Rightarrow a_n = f(n) \in \mathbb{Q}$, d.h. (a_n) ist rationale Folge

$M = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow P_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, d.h. $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Punktfolge in der Ebene $\mathbb{R}^2$.



Wichtig: Falls $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ der „erste Abschnitt" von $\mathbb{N}$ ist, dann heißt $f: \underbrace{\{1, \dots, n\}}_{= \mathbb{N}_n} \to M$ eine endliche Folge der „Länge n".

Dann $(a_n)_{n=1,\dots,n} = (a_1, \dots, a_n) \in M^n = M \times \dots \times M$, d.h. endliche Folge der Länge $n \hat{=}$ n-Tupel $n \in \mathbb{N}_n$

Also: „unendliche" Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \hat{=} \infty$-Tupel

Daher die Kurzschreibweise für z.B. reelle Folgen:

$$\boxed{\mathbb{R}^{\infty} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\}}$$ „Grenzprozess $n \to \infty$"

Jetzt Polynom (zunächst reell):

Gegeben eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Dann soll gelten: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$f(n) = a_n = 0$ für „fast alle" $n \in \mathbb{N}$.

$\iff$ $a_n \neq 0$ nur für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$

$\iff$ $\boxed{\exists n \in \mathbb{N} \ \forall k \geq n : a_k = 0}$ Es ex. ein $n \in \mathbb{N}$ als Index, so dass $a_k = 0$ für alle $k \geq n$.

Denkbar ist: (a_n) ist konstante Nullfolge, d.h.

Polynom(funktion):

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

falls $a_k = 0$ für $k \geq n+1$!!

Man kann jedes Polynom, d.h. jede Polynomfunktion identifizieren mit der zugehörigen Koeffizientenfolge:

$$p(x) = 3 - x^2 + 4x^3 - 5x^7 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$$

$a_0 = 3$, $a_2 = -1$, $a_3 = 4$, $a_7 = -5$, $a_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,2,3,7\}$

$$\operatorname{grad}(p) = \max\{i \in \mathbb{N}_0 : a_i \neq 0\} = 7$$

Also: $p(x) = 3 - x^2 + 4x^3 - 5x^7 \mathrel{\widehat{=}} (a_n) = (\overbrace{3, 0, -1, 4, 0, 0, 0, -5}, \ldots)$

$\phantom{p(x) = 3 - x^2 + 4x^3 - 5x^7 \mathrel{\widehat{=}} (a_n) = (}a_0\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots$

Wesentlich: Länge des Abschnitts in (a_n) bis zum letzten nicht verschwindenden Koeffizienten: $8 = \operatorname{grad}(p) + 1$.

ENDE der Vorlesung!