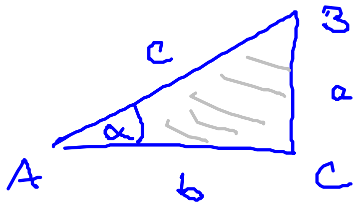
Vorlesung vom 19.12.2013 (die letzte in diesem Jahr)

- Anwendung der Additionstheoreme für sin und cos
- Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis (=Kreisfunktionen)
- Gerade/ungerade Fortsetzung einer Funktion

1) Trigonometrische Fkten am rechtwinkligen Dreieck.



$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{a}{c}} = \frac{Gk}{Hyp}$ Sinus

α': Komplementärwinkel

$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{b}{c}} = \frac{Ak}{Hyp} = \sin(\underbrace{90^\circ - \alpha}_{\alpha'})$ Kosinus

$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{Gk}{Ak} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$ Tangens

$\boxed{\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{Ak}{Gk} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}}$ Kotangens

Aus den Additionstheoremen

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}}$$

Siehe 8. Übungsblatt

folgt u.a.

35 Ü(a)

„konstant gleich"

(i) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

(ii) $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

(iii) $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

(iv) $\tan(x_1+x_2) = \dfrac{\tan(x_1)+\tan(x_2)}{1-\tan(x_1)\tan(x_2)}$

Zu (i): Wir brauchen die Erweiterung auf negativ orientierte Winkel (siehe gerade/ungerade Fortsetzung später) !!

$x\in[0,90°]$: $\boxed{\begin{array}{l}\cos(-x):=\cos(x)\\ \sin(-x):=-\sin(x)\end{array}}$ // Gerade Fortsetzung // Ungerade Fortsetzung

Dann:

$$\sin(0)=\sin(0+0)=\sin(0)\cos(0)+\cos(0)\sin(0)=2\sin(0)\cos(0)$$

$$\overset{-\sin(0)}{\Longrightarrow}\quad 2\sin(0)\cos(0)-\sin(0)=\sin(0)\cdot[2\cos(0)-1]=0$$

$$\Longrightarrow \sin(0)=0 \quad \text{oder:} \quad \cos(0)=1/2 \;\lightning$$ wird nicht gehen!!

Andererseits:

$$\cos(0)=\cos(0+0)=\cos(0)\cdot\cos(0)-\sin(0)\cdot\sin(0)$$
$$=\cos^2(0)-\sin^2(0)$$

Wäre $\cos(0)=1/2$, dann:

$$1/2=1/4-\sin^2(0) \Longrightarrow +\sin^2(0)=1/4-1/2=-1/4<0 \;\lightning$$

Also muss gelten: $\boxed{\sin(0)=0}$ und damit

$$\cos(0)=\cos^2(0) \Longrightarrow \cos^2(0)-\cos(0)=\cos(0)[\cos(0)-1]=0$$

$$\Rightarrow \cos(0)=0 \quad \text{oder} \quad \boxed{\cos(0)=1}$$

Wäre $\sin(0)=\cos(0)=0$, dann würde folgen:

$$\cos(x)=\cos(x+0)=\cos(x)\cos(0)-\sin(x)\cdot\sin(0)\equiv 0,\;\lightning$$

$$\sin(x)=\sin(x+0)=\sin(x)\underset{0}{\cos(0)}+\cos(x)\underset{0}{\sin(0)}\equiv 0 \;\lightning$$

Also: $\sin(0)=0$, $\cos(0)=1$.

Dann: $$1=\cos(0)=\cos(x-x)=\cos(x)\underbrace{\cos(-x)}_{=\cos(x)}-\sin(x)\underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin(x)}$$
$$=\cos^2(x)+\sin^2(x)$$ ← Trigonometrischer Pythagoras!

Zu (ii), (iii):

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Zu (iii):

$$(*)\quad \tan(x_1+x_2) = \frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)} = \frac{\sin(x_1)\cos(x_2)+\cos(x_1)\sin(x_2)}{\cos(x_1)\cos(x_2)-\sin(x_1)\sin(x_2)}$$

$$= \frac{\overbrace{\cancel{\cos(x_1)\cos(x_2)}}^{1}\left[\frac{\sin(x_1)}{\cos(x_1)}+\frac{\sin(x_2)}{\cos(x_2)}\right]}{\underbrace{\cancel{\cos(x_1)\cos(x_2)}}_{1}\left[1-\frac{\sin(x_1)}{\cos(x_1)}\cdot\frac{\sin(x_2)}{\cos(x_2)}\right]} = \frac{\tan(x_1)+\tan(x_2)}{1-\tan(x_1)\tan(x_2)}$$

Frage: Wie gewinne ich aus dem Additionstheorem für $\tan$ ein Additionstheorem für die Umkehrfkt. $\arctan = \tan^{-1}$?

$$\arctan(u+v) = ?$$

Ansatz: $u = \tan(x_1)$, $v = \tan(x_2)$ $\Longrightarrow$ $x_1 = \arctan(u) = \tan^{-1}(u)$

$x_2 = \arctan(v) = \tan^{-1}(v)$

Dann gilt:

$$(*) \iff \tan(\underbrace{\arctan(u)}_{=x_1} + \underbrace{\arctan(v)}_{=x_2}) = \frac{u+v}{1-u\cdot v}$$

$$\xRightarrow{\arctan(\ldots)} (\underbrace{\arctan\circ\tan}_{=\mathrm{id}})(\arctan(u)+\arctan(v)) = \arctan(u)+\arctan(v) \overset{(*)}{=} \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$$

Damit lautet die den $\arctan$ charakterisierende Gleichung:

$$\boxed{\arctan(u) + \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)}$$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$

aus dem Bildbereich $\tan(\underbrace{[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]}_{\text{Bogenmaß}})$

---

3) Kurz 2 Worte zur geraden/ungeraden Fortsetzung einer Funktion:

$f : [0, r] \to \mathbb{R}$ gegeben mit $r > 0$.

Dann heißt die Funktion

(i) $\tilde{f}_g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le r \\ f(-x), & -r \le x < 0 \end{cases}$ die gerade

Fortsetzung von f auf das Intervall $[-r, +r]$

(ii) $\tilde{f}_u(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le r \\ -f(-x), & -r \le x < 0 \end{cases}$ die ungerade

Fortsetzung von f auf das Intervall $[-r, +r]$.

ENDE der Vorlesung!

Allen Teilnehmern frohe Festtage und einen guten Start ins neue Jahr 2014 ...