Vorlesung vom 17.12.2013:

Elementare reelle Funktionen:

Spezialfälle für Polynome $\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}$ $(x \in \mathbb{R})$

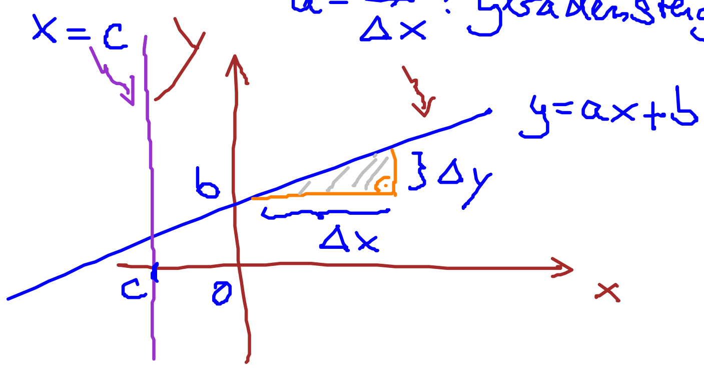
Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

A) $n = 1$: $\boxed{f(x) = ax + b}$, $a \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$

affin lineare Funktion mit Graph

$$\boxed{\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) = ax + b\}}$$ // Geradengleichung

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: Geradensteigung, $b = f(0)$: y-Achsenabschnitt



Es gibt eine allgemeine Gleichung für Geraden im $\mathbb{R}^2$

(*) $\boxed{\tilde{a}x + \tilde{b}y = \tilde{c}}$ lineare Gleichung in x, y

(Lin A)

$\Delta x = +1 \Rightarrow a = \Delta y$

(*) $\underset{\tilde{b} \neq 0}{\Longleftrightarrow}$ $y = -\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}x + \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}} = ax + b$ mit $a := -\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$, $c := \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}}$

Achtung: „Vertikal" verlaufende Geraden sind durch die Gleichung $y = f(x) = ax + b$ als Funktion nicht beschreibbar. In (*) Funktion! sind sie abgedeckt in der Gestalt $\tilde{b} = 0$: $\tilde{a}x + 0y = \tilde{a}x = \tilde{c}$ $\underset{\tilde{a} \neq 0}{\Longleftrightarrow}$ $x = \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}$

Neben der Normalform $y = f(x) = ax + b$ gibt es

a) die Punktrichtungsform $\boxed{y = f(x) = a(x - x_0) + y_0}$

Γ_f: Gerade durch $P = (x_0, y_0)$ $\Rightarrow f(x_0) = a \cdot 0 + y_0 = y_0$

b) die Zweipunkteform

Γ_f: Gerade durch die Punkte $P=(x_0,y_0)$ und $Q=(x_1,y_1)$.
$$\boxed{\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}} \quad \left(=\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\right)$$

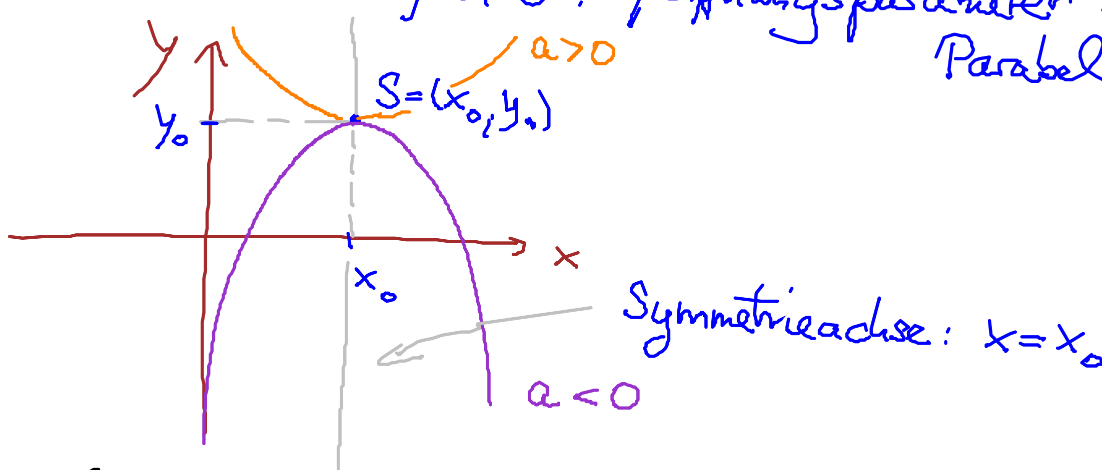
B) $\underline{n=2}$: Quadratische Funktion $\boxed{y=f(x)=ax^2+bx+c}$, $a\neq 0$

Graph $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=ax^2+bx+c=f(x)\}$ ist Parabel

Spezialdarstellung: Scheitelpunktform

Parabel mit Scheitelpunkt $S=(x_0,y_0)$
$$\boxed{y=f(x)=a(x-x_0)^2+y_0}$$
$$f(x_0)=a\cdot 0^2+y_0=y_0$$

Parameter $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$: „Öffnungsparameter" der Parabel



Frage: Wie gewinnt man aus einer gegebenen quadratischen Funktion ihre Scheitelpunktform?

Antwort: Mithilfe der quadratischen Ergänzung

Beispiel: $\boxed{y=f(x)=-2x^2+5x+7}$
$$=-2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)+7 \qquad =-2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]+7$$

wird quadratisch ergänzt!

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$= -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \underbrace{\cancel{2}^{\,1}\cdot\frac{25}{\cancel{16}_{\,8}}+7}_{=\frac{25+56}{8}=\frac{81}{8}} = \boxed{-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{81}{8}}$$

Scheitelpunkt: $S=\left(\frac{5}{4}, \frac{81}{8}\right)$; Öffnungsparameter: $a=-2<0$

Wichtig sind die Kompositionen von reellen Funktionen mit affin linearen Funktionen. Effekt: Stauchung / Streckung sowie Verschiebung bzw. Spiegelung eines Graphen zu gegebener Fkt. $f: D_f \to \mathbb{R}$.

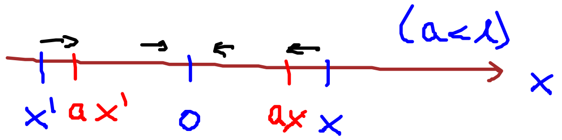
Die 3 „Bausteine" der affin linearen Fkt. $y=ax+b$:

(i) $y=ax$, $a>0$ $(b=0)$

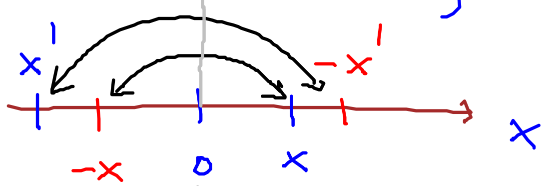
$\underline{a=1}$: $y=g(x)=x=id(x)$

$\underline{a>1}$: $y=g(x)=ax$ Streckung

$\underline{0<a<1}$: $y=g(x)=ax$ Stauchung

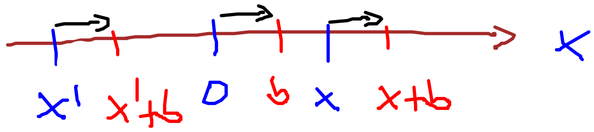


(ii) $y=-x$ $(a=-1, b=0)$

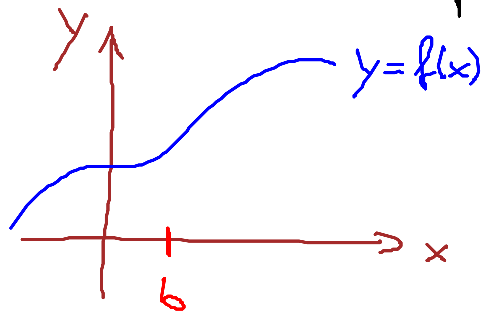


Spiegelung

(iii) $y=x+b$ $(a=1, b\neq 0)$ Verschiebung / Translation



Jetzt: $g(x) = x+b$ in Komposition $\boxed{h(x) := (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+b)}$



$h(x) = f(x+b)$

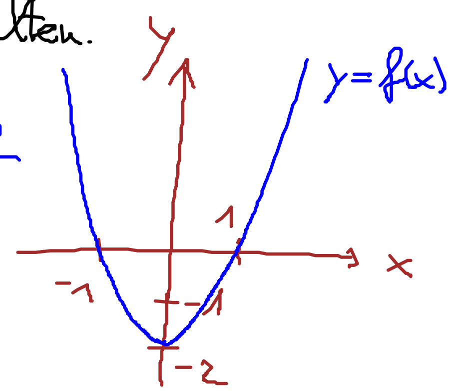
Verschiebung des Graphes um $\Delta x = -b$. Warum?

Substituiere: $h(x) = f(\underbrace{x+b}_{=u}) = f(u)$ mit $u = x+b$

$\boxed{x = u-b}$

Verschiebe u-Achse um $\Delta u = -b$, um x-Achse zu erhalten.

Beispiel: $y = f(x) = 2x^2 - 2$

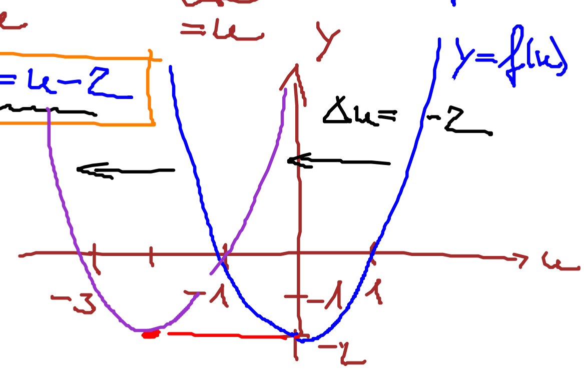


$g(x) = x+2$

$h(x) = f(g(x)) = f(\underbrace{x+2}_{=u}) = 2(\underbrace{x+2}_{=u})^2 - 2 = f(u)$

Also: $u = x+2 \iff \boxed{x = u-2}$

verschiebe „u-Achse" um $\Delta u = -2$, also 2 Einheiten nach links!



Weiteres Beispiel:

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ mit $g(x) = ax$ und

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ mit $g(x) = -x$

am Donnerstag!!

ENDE der Vorlesung!!