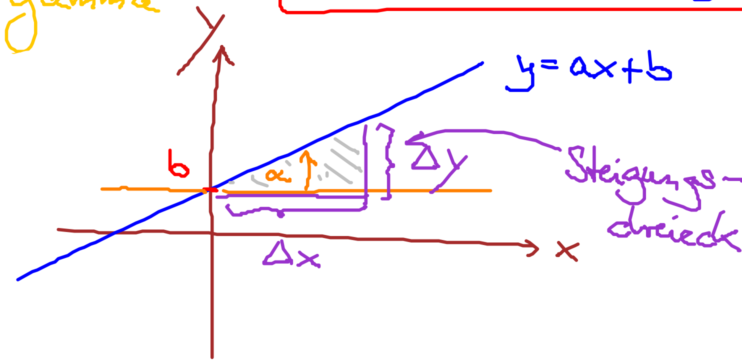
Vorlesung vom 12.12.2013:

- Affin lineare und quadratische Funktion
- Komposition mit einer affin linearen Funktion
- Symmetrien: gerade / ungerade Fkt.

1) Eine affin lineare Fkt. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hat die Gestalt $f(x)=ax+b$ mit $a,b\in\mathbb{R}$. Der Graph hat die Form

griech. Gamma → $\boxed{\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=ax+b\}}$ // Gerade im $\mathbb{R}^2$



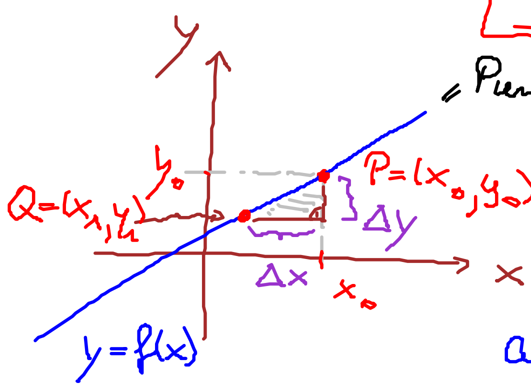
, b: y-Achsenabschnitt

$a=\tan(\alpha)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$: Steigung der Geraden

trigonometrische Funktion!

Weitere Form: $\boxed{f(x)=a(x-x_0)+y_0}$ mit $y_0=f(x_0)$

„Punkt-Steigungsform“ $P=(x_0,y_0)\in\Gamma_f$



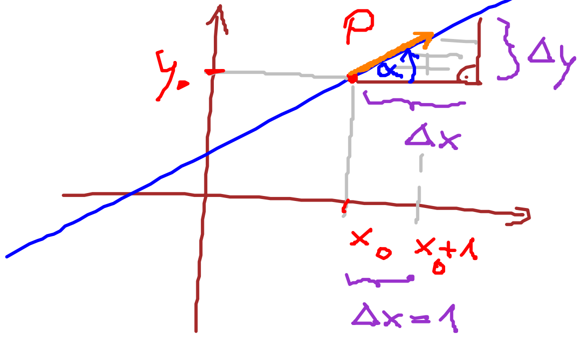
„Zweipunkteform“: $Q=(x_1,y_1)\in\Gamma_f$

$$a=\tan(\alpha)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$ also,

$$\boxed{\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=a} \Longrightarrow \boxed{y=f(x)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0)+y_0}$$

Zusammenhang mit LinA:

Beschreibung der „Geraden“ $\Gamma_f\subseteq\mathbb{R}^2$ von f in der Punktrichtungsform:



$a = \tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Für $\Delta x = 1$ erhält man: $\Delta y = a \cdot \Delta x = a$. Setze

$$\vec{v} := \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

Gerade als Punktmenge

$$\boxed{g: \underline{x}(t) = \underline{x}_0 + t\underline{v}} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + t \\ y_0 + ta \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

parametrisierte Darstellung

Ortsvektor von $P = (x_0, y_0)$

Falls $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} x_0 + t \\ y_0 + ta \end{bmatrix} \Rightarrow$ (1) $x = x_0 + t \Leftrightarrow t = x - x_0$

(2) $y = y_0 + ta = y_0 + (x - x_0)a$

$= a(x - x_0) + y_0 = f(x)$

Analog: $P = (x_0, y_0) \in g$, $Q = (x_1, y_1) \in g$

Dann:

$\underline{v} = \underline{x}_1 - \underline{x}_0$ bzw. $\boxed{g: \underline{x}(t) = \underline{x}_0 + t(\underline{x}_1 - \underline{x}_0)}, \; t \in \mathbb{R}$

2-Punkteform

Also:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y_0 + t(y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ (2) & y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \overset{x_1 \neq x_0}{\Longrightarrow} t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \end{array}$$

$$\Rightarrow y - y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot (y_1 - y_0) = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{=a} (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0}$$

2) <u>Quadratische Funktion</u>:

$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ 'Öffnungsparameter'

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a \cdot \Big[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{= x^2 + \frac{b}{a}x}\Big] \underbrace{+ c}_{= -(-c)}$$

quad. Ergänzung

Scheitelpunktform:

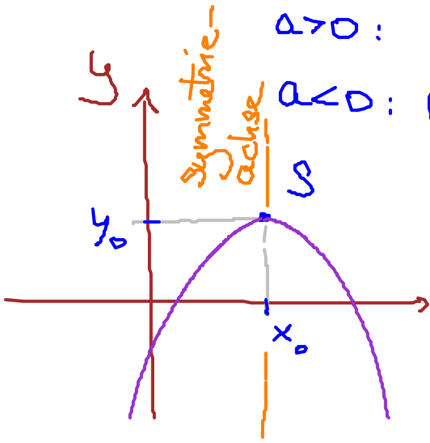
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \cancel{a}\cdot\frac{b^2-4ac}{4a^{\cancel{2}}} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x-x_0)^2+y_0$$

$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$ „Diskriminante"

$$y = f(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$$ mit Scheitelpunkt $S=(x_0,y_0)$ | Graph Γ_f ist Parabel!

$a>0$: Γ_f ist nach oben geöffnet

$a<0$: Γ_f ist nach unten geöffnet



$\underline{a<0:}$

$$y=f(x) = \underbrace{a(x-x_0)^2}_{\leq 0} + y_0 \leq y_0 \Rightarrow \text{In } x=x_0,$$ d.h. im Scheitelpunkt liegt ein Maximum vor.

Nullstellen:

$$y = f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \underset{:a}{\Leftrightarrow} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \overset{„\sqrt{\ }"}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$ ← vorausgesetzt: $\Delta \geq 0$

$$\Longrightarrow \boxed{x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$$ abc-Formel oder „Mitternachtsformel"

ENDE der Vorlesung!!