Vorlesung vom 07.01.2014:

- Die „Ausweitung" der trigonometrischen Funktionen
- Die natürlichen Zahlen plus vollständige Induktion und Wohlordnungsprinzip (WOP)
  ↳ Induktives Prinzip
- Summen-/Produktzeichen

---

1) Die trigonometrischen Funktionen als Kreisfunktionen:

Erweiterung des Definitionsbereichs für sin, cos bzw. tan, cot...

Bisher: $\sin, \cos : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$

Gelten sollen die Additionstheoreme:

(1) $\sin(x+x') = \sin(x)\cos(x') + \cos(x)\sin(x')$

Winkel im Bogenmaß!

(2) $\cos(x+x') = \cos(x)\cos(x') - \sin(x)\sin(x')$

Folgerung (trigonometrischer Pythagoras):

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad \text{„für"} \quad x' = -x$$

Dazu brauchen wir die „Fortsetzung" – d.h. Definitionsbereichserweiterung von sin, cos auf das Intervall $[-\pi/2, +\frac{\pi}{2}] \supseteq [0, \pi/2]$ unter Beibehaltung der Additionstheoreme. Man nennt solch eine Erhaltung einer Gleichung auch Permanenzprinzip.

Zusätzlich haben wir (wegen der geometrischen Herleitung):

$$(*) \quad \boxed{\begin{aligned} &\cos(x) = \sin(\pi/2 - x) \\ \Leftrightarrow\ &\sin(x) = \cos(\pi/2 - x) \end{aligned}}$$

Enger Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus!

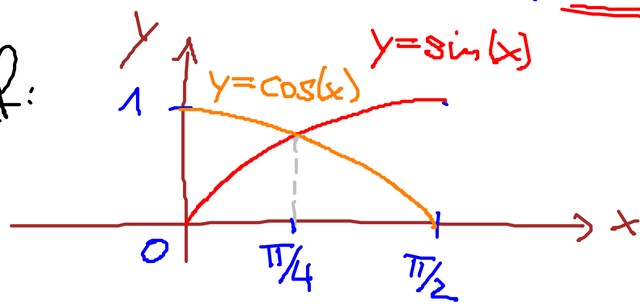
Gezeigt haben wir aus den Additionstheoremen:

$\sin(0)=0 \implies \cos(0)=1$

Dann: $\boxed{\sin(\pi/2)} \overset{(*)}{=} \cos(\pi/2-\pi/2) = \cos(0) = 1$

$\boxed{\cos(\pi/2)} \overset{(*)}{=} \sin(\pi/2-\pi/2) = \sin(0) = 0$

Graphischer Verlauf:



Beachte wegen (*):

$\boxed{\sin(\pi/4)} \overset{(*)}{=} \cos(\pi/2-\pi/4) = \cos(\pi/4) = ??$

Zudem:

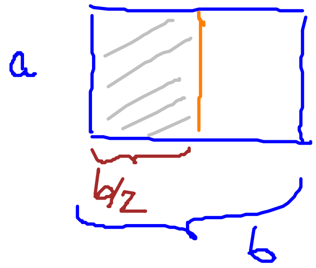
$$1 = \sin^2(\pi/4) + \underbrace{\cos^2(\pi/4)}_{=\sin^2(\pi/4)} = 2\cdot\sin^2(\pi/4)$$

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

$$\overset{:2}{\implies} \sin^2(\pi/4) = 1/2 \implies \boxed{\underbrace{\sin(\pi/4)}_{>0} = \sqrt{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\ldots = 1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4)}$$

Bemerkung: Die „$\sqrt{2}$" ist „allgegenwärtig" in Form der DIN A Norm.

Hintergrund: Eine Seite sollte derart im Verhältnis Breite zu Höhe gestaltet sein, dass die „halbe" Seite dasselbe Seitenverhältnis besitzt:



$$\frac{a}{b} = \frac{b/2}{a} \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$\cdot 2\frac{b}{a}$

große Seite

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{b}{a} = \sqrt{2}}$$

Daher sind die Prozentzahlen beim Wechsel von einem ins nächste DIN-Format gerade $\sqrt{2} \approx 141\%$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 70{,}7\%$

$\frac{141}{100}$

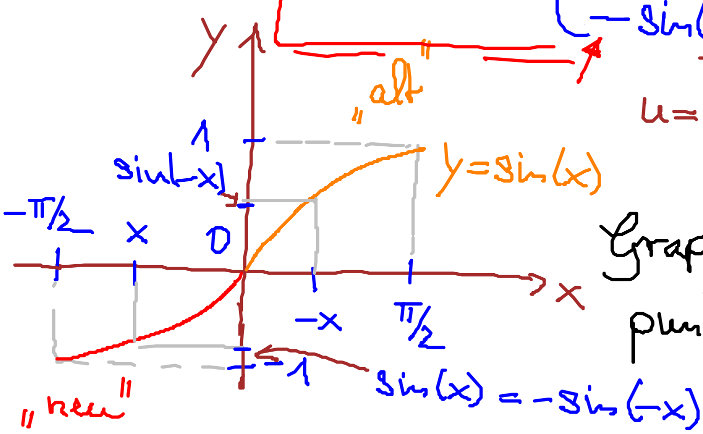
Jetzt zur geraden/ungeraden Fortsetzung von sin, cos:

Definiere:

„alter Bereich"

$$\boxed{\sin(x) := \begin{cases} \sin(x) & , x \in [0, \pi/2] \\ -\sin(-x) & , x \in [-\pi/2, 0] \end{cases}}$$

$u = -x \in [0, \pi/2]$

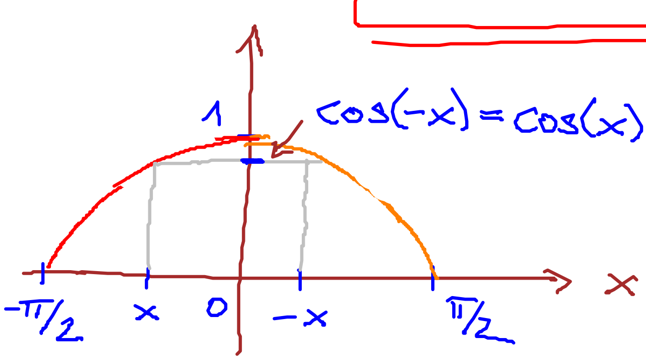


Graph ist quasi per Definition punktsymmetrisch

$\sin(-\pi/2) = -\sin(\pi/2)$
$= -1$

Ebenso erweitern wir cos durch „gerade" Fortsetzung:

$$\boxed{\cos(x) := \begin{cases} \cos(x) & , x \in [0, \pi/2] \\ \cos(-x) & , x \in [-\pi/2, 0] \end{cases}}$$



Graph ist quasi per Definition achsensymmetrisch

$$\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$$

Erweiterungsschritt (II): Vergrößere Definitionsbereich um Faktor 2 auf $[-\pi, \pi]$

z. B.: $x \in [\pi/2, \pi]$: $x = \pi/2 + x'$ mit $x' \in [0, \pi/2]$ „alter" Bereich!!

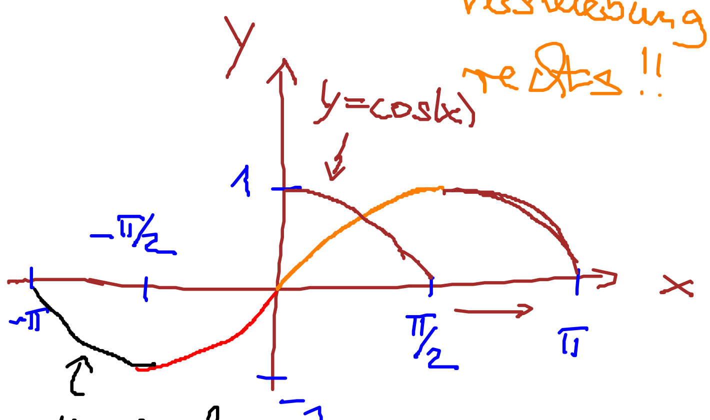
$x' = x - \pi/2$

Additionstheorem:

$$\sin(x) = \sin(\pi/2 + x') = \underbrace{\sin(\pi/2)}_{1}\cos(x') + \underbrace{\cos(\pi/2)}_{0}\sin(x')$$

$$= \cos(x') = \cos(x - \pi/2) = \cos(\pi/2 - x)$$

Verschiebung des Graph zu cos um $\Delta x = \pi/2$ nach rechts!!



ungerade Fortsetzung, bezogen auf das Intervall $[\pi/2, \pi]$, auf das Intervall $[-\pi, -\pi/2]$

Insbesondere:

$$\sin(\pi) = \cos(\pi - \pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$$

$$\sin(-\pi) = -\sin(\pi) = -0 = 0$$

Verfahre mit cos analog!!

Periodizität:

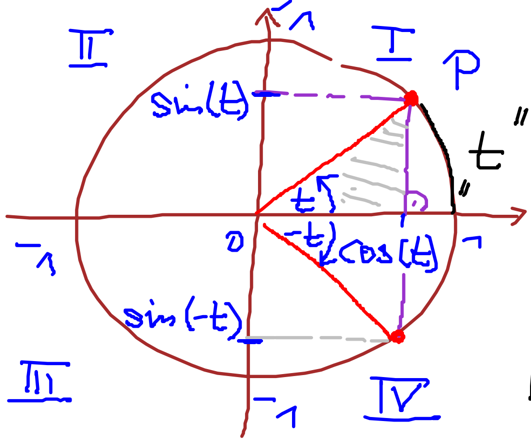
$$\sin(2\pi) = 2 \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{0} \cos(\pi) = 0$$

$$\cos(2\pi) = \cos^2(\pi) - \underbrace{\sin^2(\pi)}_{0} = (-1)^2 - 0^2 = 1$$

$$\Longrightarrow \sin(x + 2\pi) = \sin(x)\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + \cos(x)\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \ldots = \cos(x)$$

Nun kann man $\sin(x)$, $\cos(x)$ als Koordinaten von Punkten $P=(\cos(x), \sin(x))$ auf dem Einheitskreis interpretieren!!



„t" (im Bogenmaß)

$$\boxed{x^2+y^2=\cos^2(t)+\sin^2(t)\equiv 1}$$

Kreisgleichung!

<u>Quadrant</u> I: „alter" Ausgangsbereich $t\in[0,\pi/2]$

<u>Quadrant</u> IV: erster Erweiterungsbereich $t\in[-\pi/2,0]$

<u>Quadrant</u> II: zweiter Erweiterungsbereich $t\in[\pi/2,\pi]$

<u>Quadrant</u> III: gerade/ungerade Fortsetzung des 2. Erweiterungsbereichs auf $t\in[-\pi,-\pi/2]$.

Dann folgt die Periodizität, bezogen auf die Periode $T=2\pi$.

ENDE der heutigen Vorlesung!