Vorlesung vom 06.02.2014:

• **Probeklausur**

2) Ungleichung: Gesucht ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ zur Ungleichung

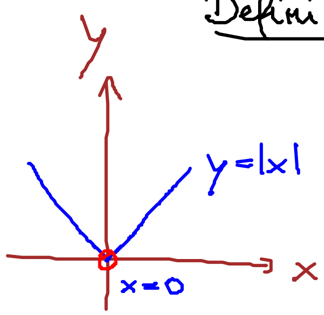
$$\frac{4\cdot|x-2|}{2x-1} < 1$$

Lösungsweg:

(i) Kritische Punkte, tabellarische Übersicht (Fälle):

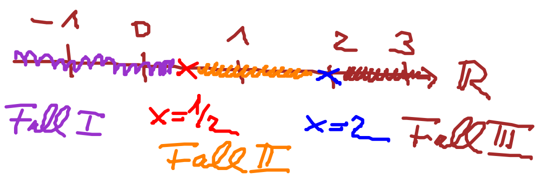
Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$ $\quad 2x-1=0 \Leftrightarrow x = 1/2$

kritisch!!



2. „kritischer" Punkt hinsichtlich Betrag („Knickpunkt")

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$



Vorweg: $x=1/2 \notin \mathbb{L}$ $(\notin D)$

$x=2$: $\dfrac{4\cdot|2-2|}{2\cdot 2-1} = \dfrac{4\cdot 0}{3} = 0 < 1$ ✓ $\Rightarrow x=2 \in \mathbb{L}$

Bleiben 3 Teilintervalle zur Untersuchung übrig:

$$\mathbb{R}\setminus\{1/2, 2\} = \,]-\infty, 1/2[\, \cup \,]1/2, 2[\, \cup \,]2, +\infty[.$$

Tabelle:

	$]-\infty,1/2[$	$]1/2,2]$	$[2,+\infty[$
$x-2$	<0	≤ 0	≥ 0
$2x-1$	<0	>0	>0

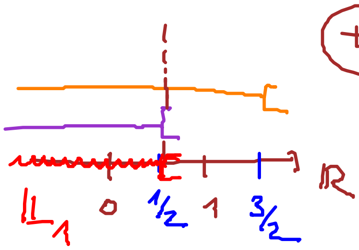
(ii) Fälle durcharbeiten:

a) $x \in \,]-\infty, 1/2[$: Dann gilt wegen $x-2<0$ und $2x-1<0$:

Beachte: $a<b$, $c<0$ $\Rightarrow ac > bc$

$$\frac{4|x-2|}{2x-1} = \frac{4(-1)(x-2)}{2x-1} < 1 \overset{\cdot(2x-1)}{\iff} -4x+8 > 2x-1 \quad !!$$

$$\overset{+4x+1}{\iff} 9 > 6x \overset{:6}{\iff} x < 9/6 = 3/2 \iff x \in \,]-\infty, \tfrac{3}{2}[$$



$$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \,]-\infty, 1/2[\, \cap \,]-\infty, \tfrac{3}{2}[\, = \,]-\infty, 1/2[$$

„und"

b) $x \in \,]1/2, 2]$: Dann gilt wegen $x-2 \leq 0$, $2x-1>0$:

$$\frac{4|x-2|}{2x-1} = \frac{-4(x-2)}{2x-1} < 1 \overset{\cdot(2x-1)}{\iff} -4x+8 < 2x-1$$

$$\iff \ldots \iff x > 3/2 \iff x \in \,]3/2, +\infty[$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \,]1/2, 2] \cap \,]3/2, +\infty[\, = \,]3/2, 2]$$

c) $x \in [2, +\infty[$: Dann gilt wegen $x-2 \geq 0$, $2x-1>0$:

$$\frac{4|x-2|}{2x-1} = \frac{4(x-2)}{2x-1} < 1 \iff 4x-8 < 2x-1$$

$$\overset{-2x+8}{\iff} 2x < 7 \iff x < 7/2 \iff x \in \,]-\infty, 7/2[$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = [2, +\infty[\, \cap \,]-\infty, 7/2[\, = [2, 7/2[$$

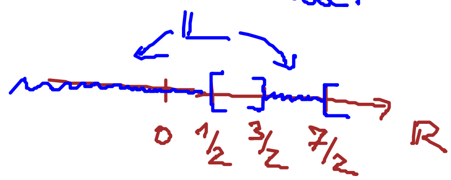
Insgesamt:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \,]-\infty, 1/2[\, \cup \boxed{]3/2, 2] \cup [2, 7/2[}$$

„oder"

$$= \,]-\infty, 1/2[\, \cup \,]3/2, 7/2[$$

„qualitative" Skizze:



$$= \mathbb{R} \setminus \left([\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}] \cup [\tfrac{7}{2}, +\infty[\right)$$

3) Betrachte $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x^3-3}{3x^3-2}$

a) (i) maximaler Def.-bereich D_f:

Es muss gelten: $3x^3-2 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq 2/3 \Leftrightarrow x \neq \sqrt[3]{2/3}$

$\Rightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{2/3}\}}$

(ii) gerader / ungerader Anteil:

$f(x) = u(x) + g(x)$ mit $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{4x^3-3}{3x^3-2} + \frac{4(-x)^3-3}{3(-x)^3-2}\right\}$

ungerade gerade

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{4x^3-3}{3x^3-2} + \frac{-4x^3-3}{-3x^3-2}\right\}$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(4x^3-3)\cdot(-3x^3-2)+(-4x^3-3)(3x^3-2)}{(3x^3-2)(-3x^3-2)} = \frac{1}{2}\,\frac{-12x^6+\cancel{x^3}+6+(-12x^6-\cancel{x^3}+6)}{4-9x^6}$

3. Binom!! $(3x^3)^2$

$= \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\cdot(6-12x^6)}{4-9x^6} = \frac{12x^6-6}{9x^6-4}$ $\cdot\frac{(-1)}{(-1)}$

$u(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{4x^3-3}{3x^3-2} - \frac{4(-x)^3-3}{3(-x)^3-2}\right\} = \ldots = \frac{1}{2}\,\frac{-12x^6+x^3+6-(\ldots)}{4-9x^6}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{-12x^6}+x^3+\cancel{6}+\cancel{12x^6}+x^3-\cancel{6}}{4-9x^6} = \frac{\cancel{2}x^3}{\cancel{2}(4-9x^6)} = \frac{x^3}{4-9x^6} = -\frac{x^3}{9x^6-4}$

b) Abbildungsvorschrift für Umkehrfunktion:

(i) Ansatz: $\boxed{y = f^{-1}(x)}$ $\Leftrightarrow$ $f(y) = (f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$. Also:

ge-sucht! Umkehrfkt. zu f $f\circ(\,)$ $=id$

$x = f(y) = \frac{4y^3-3}{3y^3-2} \Rightarrow x(3y^3-2) = 4y^3-3 \Rightarrow 3xy^3-2x = 4y^3-3$

$-4y^3+2x$

$\Rightarrow 3xy^3-4y^3 = y^3(3x-4) = 2x-3 \Rightarrow y^3 = \frac{2x-3}{3x-4} \Rightarrow \sqrt[3]{\;}$

$3x-4\neq 0$

$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-3}{3x-4}}$

(ii) maximaler Definitionsbereich $D_{f^{-1}}$:

$$3x-4 \neq 0 \iff x \neq 4/3 \implies 4/3 \notin D_{f^{-1}}$$

$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = (e^{\ln x})^{1/3} = e^{1/3 \cdot \ln(x)}$, $x>0$!!

zusätzlich: $\boxed{\frac{2x-3}{3x-4} \geq 0}$, da sonst $\sqrt[3]{\ }$ erst einmal nicht definiert ist.

Siehe Aufg. 2 !!

D.h.: $2x-3$ und $3x-4$ müssen dasselbe Vorzeichen haben!!

Tabelle bezüglich Nullstellen $x_1 = 3/2$ (Zähler) und $x_2 = 4/3$ (Nenner)

	$]-\infty, 4/3[$	$]4/3, 3/2]$	$[3/2, +\infty[$
$2x-3$	<0 (−)	≤ 0 (−)	≥ 0 (+)
$3x-4$	<0 (−)	>0 (+)	>0 (+)
$\frac{2x-3}{3x-4}$	>0 (+)	≤ 0 (−)	≥ 0 (+)
	✓	No!	✓

$$\boxed{D_{f^{-1}} =]-\infty, 4/3[\cup [3/2, +\infty[}$$

(iii) Probe:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{=y}) = \sqrt[3]{\frac{2y-3}{3y-4}} = \sqrt[3]{\frac{2\frac{4x^3-3}{3x^3-2}-3}{3\frac{4x^3-3}{3x^3-2}-4}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{[2(4x^3-3)-3(3x^3-2)]\,\cancel{(3x^3-2)}^{1}}{\cancel{(3x^3-2)}_{1}[3(4x^3-3)-4(3x^3-2)]}} = \sqrt[3]{\frac{8x^3-\cancel{6}-9x^3+\cancel{6}}{\cancel{12x^3}-9-\cancel{12x^3}+8}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-x^3}{-1}} = \sqrt[3]{x^3} = x = id(x)$$ ✓

c) $f(z) = \frac{4z^3-3}{3z^3-2} \implies f(\underbrace{1+i}_{=z}) = \frac{4(1+i)^3-3}{3(1+i)^3-2} =$

$(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i)$
$= 2i(1+i) = 2i + 2i^2$
$= -2+2i$

$$= \frac{4(-2+2i)-3}{3(-2+2i)-2} = \frac{-8+8i-3}{-6+6i-2} = \frac{-11+8i}{-8+6i}$$

komplex konjugiert erweitern!! $\Longrightarrow$

$w = -8+6i$

$\bar{w} = -8-6i$

$$\boxed{f(1+i)} = \frac{(-11+8i)(-8-6i)}{(-8+6i)(-8-6i)} = \frac{88-64i+66i-48i^2}{64-36i^2} = \frac{88+2i+48}{64+36}$$

$$= \frac{136+2i}{100} = \boxed{\frac{34}{25}+\frac{1}{50}i = w}$$

$\Longrightarrow \underbrace{\mathrm{Re}(w)}_{a} = \frac{34}{25} = 1{,}36$; $\underbrace{\mathrm{Im}(w)}_{b} = \frac{1}{50} = 0{,}02$; $|w| = |f(1+i)| = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{34}{25}\right)^2 + \left(\frac{1}{50}\right)^2} = \frac{\sqrt{68^2+1^2}}{50}$

$\left(\frac{68}{50}\right)^2$

$$\Longrightarrow \boxed{|w| = \frac{\sqrt{4625}}{50}}$$

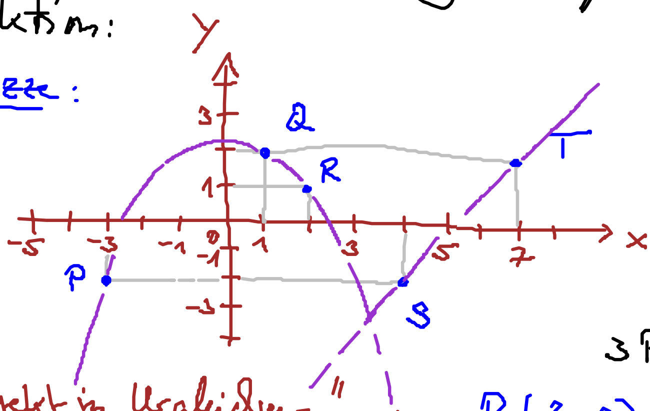
$68^2 = (70-2)^2 = 70^2 - 2\cdot 70\cdot 2 + 2^2$

$= 4900 - 280 + 4 = 4624$

ENDE des „offiziellen" Teils!!

4) Mathematische Beschreibung einer „visuell" – d.h. graphisch – gegebenen Funktion:

Skizze:



a) (i) Parabel in Scheitelpunktform:

quadratische Fkt.

$q(x) = a\cdot(x-x_0)^2 + y_0$ mit Scheitelpkt. $\tilde{S} = (x_0, y_0)$

3 Punkte ergeben 3 Gleichungen:

$P=(-3;-2)$:	$q(-3) = a(-3-x_0)^2 + y_0 = -2$	(1)
$Q=(1;2)$:	$q(1) = a(1-x_0)^2 + y_0 = 2$	(2)
$R=(2;1)$:	$q(2) = a(2-x_0)^2 + y_0 = 1$	(3)

(1),(2),(3) nach y_0 aufgelöst:

$$y_0 = \underbrace{-2 - a(-3-x_0)^2}_{(1)} = \underbrace{2 - a(1-x_0)^2}_{(2)} = \underbrace{1 - a(2-x_0)^2}_{(3)}$$

$\hookrightarrow$: $a(1-x_0)^2 - a(-3-x_0)^2 = 2+2 = 4$

$\Rightarrow a\{(1-x_0)^2 - (-3-x_0)^2\} = 4 \Rightarrow a(-8x_0-8) = 4$

$= 1 - 2x_0 + \cancel{x_0^2} - (9 + 6x_0 + \cancel{x_0^2}) = -8-8x_0$

$:(-8)$ $\Rightarrow \boxed{a(x_0+1) = -4/8 = -1/2}$ // Weiter unten!! $\hookrightarrow$

Direkt in „Urgleichung"

$q(x) = ax^2+bx+c$ einsetzen:

LGS
$$\left\{\begin{array}{l} q(-3) = 9a - 3b + c = -2 \\ q(1) = a + b + c = 2 \\ q(2) = 4a + 2b + c = 1 \end{array}\right.$$

Gauß-Alg.: c b a ← „umdrehen"!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 9 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{I}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot II}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&-2&1\\0&1&3&-1\end{array}\right]\xrightarrow{III-II}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&-2&1\\0&0&5&-2\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{5}III}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2/5\end{array}\right]\xrightarrow[II+2III]{I-III}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&12/5\\0&1&0&1/5\\0&0&1&-2/5\end{array}\right]\xrightarrow{I-II}$$

$$\begin{array}{cccc}c&b&a&\\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&11/5\\0&1&0&1/5\\0&0&1&-2/5\end{array}\right] \Rightarrow a=-2/5,\ b=1/5,\ c=11/5 \Rightarrow \boxed{q(x)=\frac{1}{5}\cdot(-2x^2+x+11)}\ (*)$$

Test (Horner):

		$-2/5$	$1/5$	$11/5$
$P=(-3;-2)$:	$\cdot(-3)$ +	0	$6/5$	$-21/5$
		$-2/5$	$7/5$	$-10/5=-2=q(-3)$
$Q=(1;2)$:	$\cdot 1$ +	0	$-2/5$	$-1/5$
		$-2/5$	$-1/5$	$+10/5=2=q(1)$
$R=(2;1)$:	$\cdot 2$ +	0	$-4/5$	$-6/5$
		$-2/5$	$-3/5$	$5/5=1=q(2)$

$(*)$ in Scheitelpunktform wandeln:

$$q(x)=-\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{5}x+\frac{11}{5}=-\frac{2}{5}\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)+\frac{11}{5}=-\frac{2}{5}\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]+\frac{11}{5}$$

$\frac{1}{5}:\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{1}{2}$

$$=-\frac{2}{5}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{40}+\frac{11}{5}=-\frac{2}{5}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{89}{40}$$

$+\frac{2}{5\cdot 16_8}\ {}^{1}$; $a=-2/5$

$=a(x-x_0)^2+y_0$

Scheitelpunkt: $\tilde{S}=\left(\frac{1}{4},\frac{89}{40}\right)=(x_0,y_0)$

„Weiter von oben rechts": Wir haben schon gewonnen:

(1) $\boxed{a(x_0+1)=-1/2}$ Betrachte das Ganze mit der Gleichung

$$\sqcup:\quad 2-a(1-x_0)^2=1-a(2-x_0)^2 \Rightarrow a(2-x_0)^2-a(1-x_0)^2=1-2=-1$$

$$\Longrightarrow a[\underbrace{(2-x_0)^2-(1-x_0)^2}_{\text{3. Binom!}}]=a[\underbrace{\{(2-x_0)+(1-x_0)\}}_{(3-2x_0)}\cdot\underbrace{\{(2-x_0)-(1-x_0)\}}_{1}]=-1$$

(u^2-v^2, $u+v$, $u-v$)

$$\Longrightarrow \boxed{a(3-2x_0)=-1}\ (2)$$ Division $\frac{(2)}{(1)}$:

$$\frac{(2)}{(1)}:\ \frac{\cancel{a}(3-2x_0)}{\cancel{a}(x_0+1)}\overset{!}{=}\frac{-1}{-1/2}=+2 \Rightarrow 3-2x_0=2\cdot(x_0+1)=2x_0+2$$

$+2x_0-2$

$$\Longrightarrow 1=4x_0 \Rightarrow \boxed{x_0=1/4}$$ in (2) eingesetzt:

$$a(\underbrace{3-2\cdot\tfrac{1}{4_2}}_{=5/2})=-1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-1}{5/2}=-\frac{2}{5}}$$ eingesetzt in die Gleichung

$$y_0 = 1 - a(2-x_0)^2 = 1 - \left(-\frac{2}{5}\right)\left(2-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2 = 1 + \frac{\cancel{2}^{1}\cdot 49}{5\cdot \cancel{16}_{8}} = 1 + \frac{49}{40} = \frac{89}{40}$$

$$\Longrightarrow \boxed{q(x) = -\frac{2}{5}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{89}{40}}$$

„Riesenweg" zur Scheitelpunktgleichung

(ii) Affin lineare Funktion zur Geradengleichung:

$$\boxed{y = g(x) = a(x-x_0) + y_0}$$

Punktrichtungsform mit $a = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$ bezogen auf $S = (x_0; y_0) = (4; -2)$; $T = (x_1, y_1) = (7; 2)$

Also:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2-(-2)}{7-4} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{y = g(x) = \frac{4}{3}\cdot(x-4) - 2}$$

b) (i) Schnittpunkt Gerade und Parabel:

$$q(x) = -\frac{2}{5}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{89}{40} \overset{!}{=} g(x) = \frac{4}{3}(x-4) - 2$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{2}{5}\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + \frac{89}{40} = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} - 2$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{40} + \frac{89}{40} = \frac{4}{3}x - \frac{22}{3}$$

$$+\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{\cancel{88}}{\cancel{40}}\frac{11}{5}$$

$$\Longleftrightarrow 0 = \frac{2}{5}x^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right)x - \frac{22}{3} - \frac{11}{5} = \frac{2}{5}x^2 + \frac{17}{15}x - \frac{143}{15}$$

$$\frac{20-3}{15} = \frac{17}{15} \qquad = \frac{-110-33}{15} = \frac{-143}{15}$$

$$\cdot 15 \Longrightarrow 0 = 6x^2 + 17x - 143$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 17^2 + 4\cdot 6\cdot 143 = 3.721 = 61^2$$

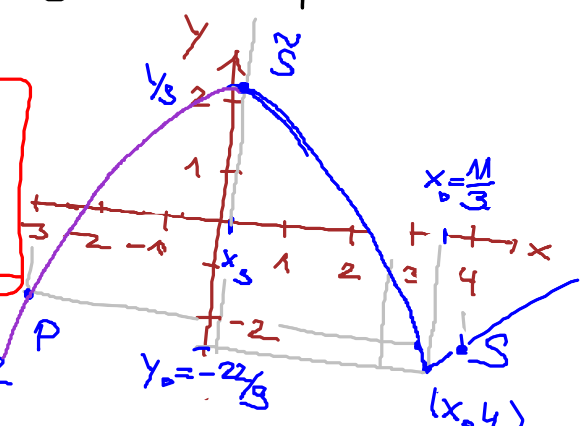
$$\Longrightarrow x_{1/2} = \frac{-17 \pm \sqrt{\Delta}}{12} = \frac{-17 \pm \sqrt{61^2}}{12} = \frac{-17 \pm 61}{12}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x_1 = \frac{44}{12} = \frac{11}{3},\ x_2 = \frac{-\cancel{78}^{13}}{\cancel{12}_{2}} = -\frac{13}{2}}$$

Gesucht ist der „weiter rechts" liegende Schnittpunkt.

Also: $x_S = \frac{11}{3}$ (>0). Dann:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{89}{40}, & x \leq \frac{11}{3} \\ \frac{4}{3}(x-4) - 2, & x > \frac{11}{3} \end{cases}}$$



$$f\left(\tfrac{11}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{11}{3} - 4\right) - 2 = \frac{44}{9} - \frac{16}{3} - 2$$

$$= \frac{44}{9} - \frac{22}{3} = \frac{44-66}{9} = -\frac{22}{9}$$

c) Graphen zu

(i) $g(x) = -f(x-2)$ $\quad \| \quad \boxed{u = x-2} \Leftrightarrow x = u+2$

Verschiebung in x-Richtung um $\Delta x = 2$ nach rechts!

Spiegelung an der x-Achse

(ii) $h(x) = f(-x) + 2$

Verschiebung in y-Richtung um $\Delta y = 2$ nach oben!!

Spiegelung an y-Achse

ENDE der Vorlesung!!