Vorlesung vom 04.02.2014:

- Probeklausur sowie
- UE-Aufgabe zu H50 (Abgabe Donnerstag, 16^{00} Uhr)

Aufgabe 1 (Probeklausur)

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$, gegeben durch

$$\boxed{a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) \qquad (n\in\mathbb{N}_0)}$$

(i) „Empirische" Herleitung der Folgenvorschrift für a_n:

$n=0$: $a_0 = \prod_{k=1}^{0}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) \overset{??}{=} 1$ „leeres Produkt", da obere Grenze < untere Grenze

| $e=1$ ist neutrales Element der Multiplikation

$n=1$: $a_1 = \prod_{k=1}^{1}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \underbrace{1-\frac{1^2}{3^2}}_{k=1} = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}$

$n=2$: $a_2 = \prod_{k=1}^{2}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \underbrace{\frac{8}{9}}_{k=1}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{4}{4^2}\right)}_{k=2} = \frac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}}\cdot\frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,1}} = \frac{2}{3}$

$n=3$: $a_3 = \prod_{k=1}^{3}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{2}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right)\right)}_{=a_2=2/3}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{9}{25}\right)}_{k=3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{16}{25} = \frac{32}{75}$ ($9=3^2$, $25=5^2$)

$n=4$: $a_4 = \prod_{k=1}^{4}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = a_3\cdot\underbrace{\left(1-\frac{4^2}{6^2}\right)}_{k=4} = \frac{\cancel{32}^{\,8}}{\cancel{75}_{\,15}}\cdot\frac{\cancel{20}^{\,4}}{\cancel{36}_{\,9}} = \frac{32}{135}$

Wir machen uns einmal an das Produkt ran:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+2)^2-k^2}{(k+2)^2} = \prod_{k=1}^{n}\frac{\cancel{k^2}+4k+4-\cancel{k^2}}{(k+2)^2}$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{4(k+1)}{(k+2)^2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n}4\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n}(k+2)\right)^2} \underset{\ell=k+1,\ i=k+2}{=} \frac{4^n\ \underbrace{\prod_{\ell=2}^{n+1}\ell}_{=(n+1)!}}{\Big(\underbrace{\prod_{i=3}^{n+2} i}_{=\frac{(n+2)!}{2!}}\Big)^2}$$

$$= \frac{4^n\cdot(n+1)!}{\left[\frac{(n+2)!}{2}\right]^2} = \frac{4^n\cdot 2^2\cdot \cancel{(n+1)!}^{\,1}}{(n+2)!\,\underbrace{\cancel{(n+2)!}}_{=(n+2)\cdot\cancel{(n+1)!}}} = \frac{4^{n+1}}{(n+2)\cdot(n+2)!}$$

Hurra, da ist sie, die eindeutige Abbildungsvorschrift!!

Jetzt Beweis der Formel mittels vollständiger Induktion über „n":

(I.A.) $n=0$: oft „pathologisch"

$$a_0 = \prod_{k=1}^{0}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = 1 \overset{!}{=} \frac{4^{0+1}}{(0+2)\cdot(0+2)!} = \frac{4^1}{2\cdot 2!} = \frac{4}{2\cdot 2} = 1$$

leeres Produkt

(I.S.) $n \to n+1$: Wir beweisen, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ die Implikation

$(\forall n\in\mathbb{N}:)\ A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ein korrekter Schluss ist.

$A(n)$ ist die für alle $n\in\mathbb{N}$ zu beweisende Aussage.

(I.V.) $$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \frac{4^{n+1}}{(n+2)(n+2)!}$$

(I.B.) $$a_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right) = \frac{4^{(n+1)+1}}{[(n+1)+2]\cdot[(n+1)+2]!} = \frac{4^{n+2}}{(n+3)(n+3)!}$$

"

3. Binom-Ecke:
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Beweis: Es gilt:

$$a_{n+1}=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right)\right)\cdot\underbrace{\left(1-\frac{(n+1)^2}{(n+3)^2}\right)}_{k=n+1}=\boxed{a_n}\,\underbrace{\frac{\boxed{(n+3)^2-(n+1)^2}}{(n+3)^2}}_{k=n+1}$$

3. Binom!

$$\prod_{k=n+1}^{n+1}\left(1-\frac{k^2}{(k+2)^2}\right)$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=}\frac{4^{n+1}}{(n+2)(n+2)!}\cdot\frac{\overbrace{[(n+3)+(n+1)]}^{2n+4}\cdot\overbrace{[(n+3)-(n+1)]}^{=2}}{(n+3)^2}$$

$$=\frac{4^{n+1}\cdot(2n+4)\cdot 2}{(n+2)\boxed{(n+2)!\,(n+3)}^2}=\frac{4^{n+1}\cdot 2\cancel{(n+2)}\cdot 2}{\cancel{(n+2)}\cdot(n+3)!\,(n+3)}=\frac{4^{n+2}}{(n+3)(n+3)!}$$

Für die Hausaufgabe 50 H(c):

50 Ü(b) $\alpha=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

(i) $\Rightarrow \alpha^2=(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$
$=7-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+3$
$=10-2\sqrt{21}$

-10: $\Rightarrow \alpha^2-10=-2\sqrt{21}$

$(\ )^2$: $\Rightarrow (\alpha^2-10)^2=(-2\sqrt{21})^2$
$=4\cdot 21=84$

-84: $\Rightarrow (\alpha^2-10)^2-84=\alpha^4-20\alpha^2+100-84=\alpha^4-20\alpha^2+16=0$!!

2. Binom!

// Suche eine „wurzelfreie" Darstellung der Form $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_0=0$ mit $a_k\in\mathbb{Z}$ $(k=0,\ldots,n)$. Dann ist $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ Polynom mit $f(\alpha)=0$, d.h. $\alpha\in\mathbb{R}$ ist Nullstelle von $f(x)$!!

Also ist $f(x)=x^4-20x^2+16\in\mathbb{Z}[x]$ das/ein gesuchte/s Polynom mit $f(\alpha)=f(\sqrt{7}-\sqrt{3})=0$

(ii) $\alpha = \sqrt{7} - \sqrt{3} \Rightarrow \underbrace{(\alpha - \sqrt{7})^2}_{\alpha^2 - 2\sqrt{7}\alpha + 7} = \underbrace{(-\sqrt{3})^2}_{=+3} \overset{-3}{\Rightarrow} \alpha^2 + 4 - 2\sqrt{7}\alpha = 0$

$\overset{+2\sqrt{7}\alpha}{\Rightarrow} \alpha^2 + 4 = 2\sqrt{7}\alpha \overset{(\,)^2}{\Rightarrow} (\alpha^2+4)^2 = \alpha^4 + 8\alpha^2 + 16 = \underbrace{(2\sqrt{7}\alpha)^2}_{=4 \cdot 7 \alpha^2} = 28\alpha^2$

$\overset{-28\alpha^2}{\Rightarrow} \alpha^4 - 20\alpha^2 + 16 = 0$. Führt auf dasselbe Polynom

$f(x) = x^4 - 20x^2 + 16 \in \mathbb{Z}[x]$ mit $f(\alpha) = 0$.

ENDE der Vorlesung !!