28.1

- rationale Nullstellen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

gibt es Nullstellen in $\mathbb{Q}$?

- $f(x)$ Polynom mit $\operatorname{grad}(f) = n$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

und sei $\alpha = \frac{p}{q}$ eine Nullstelle von f. Dann gilt folgendes:

(p, q teilerfremd)

1) p teilt a_0 $\qquad p \mid a_0$

2) q teilt a_n $\qquad q \mid a_n$

Beispiel

$$f(x) = \overset{a_0}{3} - \overset{a_1}{2x} + \overset{a_4}{5x^4}$$

- Ist $\frac{3}{4}$ eine Nullstelle? ($3 = p$, $4 = q$) $\qquad p \mid a_0$ aber $q \nmid a_n$

- kann 1 eine Nullstelle sein? $\quad p = 1, q = 1$ Es kann sein

$$f(1) = 3 - 2 + 5 \neq 0$$

Beweis.

Sei $\alpha = \frac{p}{q}$ eine Nullstelle von $f(x)$

$$\Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \dots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + a_2 p^2 q^{n-2} + \dots + a_n p^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 q^n = -\left(p a_1 q^{n-1} + a_2 p^2 q^{n-2} + \dots + a_n p^n\right) = -p\underbrace{\left(a_1 q^{n-1} + a_2 q p + \dots + a_n p^{n-1}\right)}_{r \in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow a_0 \cdot q^n = -p \cdot r \Rightarrow p \mid a_0 q^n \quad \left(\text{weil } \frac{a_0 q^n}{p} = -r\right)$$

$$\Rightarrow p \mid a_0 \text{ oder } p \mid q^n$$

$$\Rightarrow \boxed{p \mid a_0} \quad (\text{weil } p \text{ und } q \text{ teilerfremd sind})$$

$$\boxed{2 \mid 3 \cdot 8 \Rightarrow \begin{matrix} 2 \nmid 3 \\ 2 \mid 8 \end{matrix}}$$

$$a_n p^n = -\left(a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \dots + a_{n-1} p^{n-1} q\right)$$

$$= -q\underbrace{\left(a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \dots + a_{n-1} p^{n-1}\right)}_{s} = -q \cdot s$$

$$\Rightarrow q \mid a_n \cdot p^n \Rightarrow q \mid a_n \text{ oder } q \mid p^n \Rightarrow \boxed{q \mid a_n}$$

✓

$$f(x) = \underset{a_0}{4} - x^2 - \underset{a_4}{3} x^4$$

wir suchen alle rationale Nullstellen

wenn $\frac{p}{q}$ Nullstelle ist $\Rightarrow$ $p \mid 4 \Rightarrow p = \pm 1, 2, 4$

$q \mid 3 \Rightarrow q = \pm 1, 3$

	1	2	4
1	± 1	± 2	± 4
3	$\pm 1/3$	$\pm 2/3$	$\pm 4/3$

12 mögliche Nullstellen

um die Nullstellen zu finden muss man ausrechnen:

$f(1) =$

$f(2) =$

$f(4) =$

$\dots$

Aufgabe 4.7

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{ (a,b) , a,b \in \mathbb{Q} \}$$

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) * (c,d) = (ac + 2bd, ad + bc)$$

a) $(K, \oplus, *)$ ist ein Körper. Wir zeigen:

a.1) (DG) $\quad (a,b) * [(c,d) \oplus (e,f)] = \underline{[(a,b) * (c,d)] \oplus [(a,b) * (e,f)]}$

Linke Seite

$$(a,b) * (c+e, d+f) = (a(c+e) + 2b(d+f), a(d+f) + b(c+e))$$
$$= (ac + ae + 2bd + 2bf, ad + af + bc + be)$$

Rechte Seite

$$(ac + 2bd, \underline{ad + bc}) \oplus (ae + 2bf, \underline{af + be})$$
$$= (ac + 2bd + ae + 2bf, ad + bc + af + be)$$

a.2) (AG) Analog

$$[(a,b) * (c,d)] * (e,f) = (a,b) * [(c,d) * (e,f)]$$

a.3) Neutralelement für $+$: $(0,0)$

$$(a,b) \oplus (0,0) = (a,b)$$

Neutralelement für $*$?

$$\underbrace{(a,b) * (c,d)} = (a,b)$$
$$(ac + 2bd, ad + bc) = (a,b)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} ac + 2bd &= a \\ ad + bc &= b \end{aligned} \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

Es gilt für alle a, b. dann gilt auch für $a = 0$

$$\begin{aligned} 2bd &= 0 \\ bc &= b \end{aligned} \qquad \forall b \in \mathbb{Q}$$

$$\Longrightarrow \quad d = 0, \quad c = 1 \quad \Rightarrow \quad (1,0) \text{ ist Neutral bez. } *$$

a.4) Inverse ~~Element~~ bez. $*$:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \Rightarrow \exists (a', b') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$
$$(a,b) \neq (0,0) \qquad\qquad (a,b) * (a', b') = (1,0)$$

$$(a,b) * (a',b') = (aa' + 2bb', \; ab' + a'b) = (1,0)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} aa' + 2bb' &= 1 \\ ab' + a'b &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a' = \frac{1 - 2bb'}{a}$$

$$ab' + \left(\frac{1 - 2bb'}{a} \right) b = 0$$

$$\Longrightarrow \quad ab' + \frac{b}{a} - \frac{2b^2}{a} b' = 0 \quad \Rightarrow \quad b' \left(a - \frac{2b^2}{a} \right) = -\frac{b}{a}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{b' = -\frac{b}{a^2 - 2b^2}}$$

$$a' = \frac{1}{a} \left(1 + 2b \frac{b}{a^2 - 2b^2} \right) = \frac{a^2 - 2b^2 + 2b^2}{a(a^2 - 2b^2)} = \boxed{\frac{a}{a^2 - 2b^2}}$$

d.h. $\forall (a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}, \; -\frac{b}{a^2 - 2b^2} \right)$$

b) $\varphi: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

$a \longmapsto \varphi(a) = (a,0) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

Zeigen!

(i) φ injektiv

(ii) φ strukturbehaltend

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(a+b) &= \varphi(a)\oplus\varphi(b)\\ \varphi(a\cdot b) &= \varphi(a) * \varphi(b)\end{aligned}}$$

Bew.

(i) $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow (a,0) = (b,0) \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow \varphi$ injektiv.

(ii) $\varphi(a+b) = (a+b, 0) = (a,0)\oplus(b,0) = \varphi(a)\oplus\varphi(b)$

$\varphi(a\cdot b) = (ab, 0)$

def. von $*$

$\varphi(a)\cdot\varphi(b) = (a,0)\cdot(b,0) = (a\cdot b + 2\cdot 0\cdot 0,\ a\cdot 0 + b\cdot 0)$

$= (ab, 0) = \varphi(a\cdot b)$

φ bildet bijektiv $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{Q}\times\{0\} = \{(a,0),\ a\in\mathbb{Q}\}$

$\Longleftrightarrow \varphi: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\times\{0\}$ ist bijektiv

zu zeigen: $\varphi: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\times\{0\}$ injektiv und surjektiv

— ok —

. φ surjektiv $\Longleftrightarrow \forall (a,0)\in\mathbb{Q}\times\{0\}$ ist $\varphi^{-1}(\{a,0\}) \neq \{\ \}$

wir nehmen $(a,0)\in\mathbb{Q}\times\{0\}$ beliebig

dann $\varphi^{-1}(\{a,0\}) = \{x\in\mathbb{Q} \mid \varphi(x) = (a,0)\}$

$= \{x\in\mathbb{Q} : (x,0) = (a,0)\} = \{a\} \neq \{\ \}$

c) $f(x) = x^2 - 2$ $\quad f: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

. keine rationale Nullstellen

. nur $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Wir schreiben $f(x)$ als ein Polynom in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$,

$f(x) = x^2 - \underbrace{(2,0)}_{\varphi(2)}$ $\quad f: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{R}$

$\alpha = (0,1)$ ist eine Nullstelle von $f(x)$

$$f((0,1)) = (0,1) * (0,1) - (2,0) = (0+2\cdot 1\cdot 1, 0+0) - (2,0)$$
$$= (0,0)$$

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$(a,b) \longrightarrow$

NE $\oplus$ $(0,0)$

NE $*$ $(1,0)$

$(a,b) * (c,d) = (ac+2bd, ad+bc)$

Nullstelle von x^2-2:

$(0,1)$

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x+\sqrt{2}y, \ x,y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$

$a+\sqrt{2}b$

$0+\sqrt{2}\cdot 0 = 0$

$1+\sqrt{2}\cdot 0 = 1$

$(a+\sqrt{2}b)\cdot(c+\sqrt{2}d) =$

$= ac+\sqrt{2}bc+\sqrt{2}da+2bd$

$= (ac+2bd)+\sqrt{2}(ad+bc)$

$\sqrt{2} = 0+\sqrt{2}\cdot 1$

$f(x) = x^2+1 \implies$ keine reelle Nullstelle $\implies$ $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{R}(\sqrt{-1})$