26.11

Aufgabe 20

$\sim^2$ Relation in $\mathbb{R}$

$x \sim^2 y :\Leftrightarrow x^2 = y^2$

a) (REF) $x \sim^2 x \Leftrightarrow x^2 = x^2$ (Wahr)

(SYM) $x \sim^2 y \Rightarrow y \sim^2 x \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2$ (Wahr)

(TRA) $x \sim^2 y \wedge y \sim^2 z \Rightarrow x \sim^2 z$

$x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2$ (Wahr)

b) $[0] = \{x \in \mathbb{R} : x \sim^2 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\} = \{0\}$

$[1] = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\} = [-1]$

$[1] \cap [-1] = [1]$ ← Beachten: $-1 \in [1]$ dann $[-1] = [1]$

$[1] \cap [0] = \emptyset$

$[2] = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2^2 = 4\} = \{-2, 2\}$

$[x] = \{y \in \mathbb{R} : y \sim^2 x\}$

$z \in [x] \Leftrightarrow z \sim^2 x$

Wenn $y \sim^2 x$, dann $y \sim^2 z$ (wegen (TRA))

$y \in [x] \Longrightarrow y \in [z] \Leftrightarrow [x] \subseteq [z]$

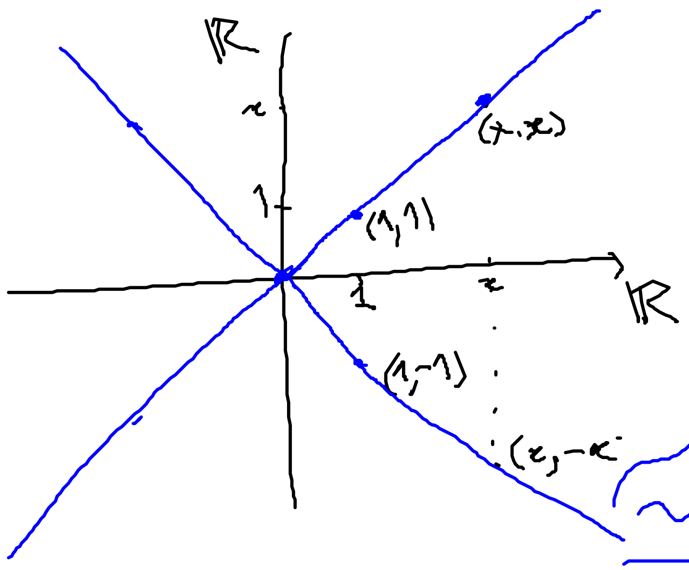
$y \in [z] \iff y \sim^2 z \Rightarrow y \sim^2 x \Rightarrow y \in [x] \Rightarrow [z] \subseteq [x]$

$$\boxed{z \in [x] \Rightarrow [z] = [x]}$$

i) $P = \mathbb{R}/_{\sim^2} = \{ [x] , x \in \mathbb{R} \}$

$0 \sim 0 \Rightarrow (0,0) \in \sim^2$

$(x,x), (x,-x), (-x,x), (-x,-x)$

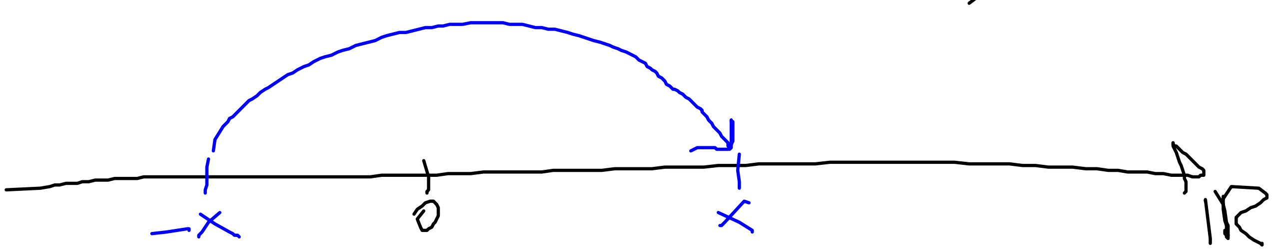


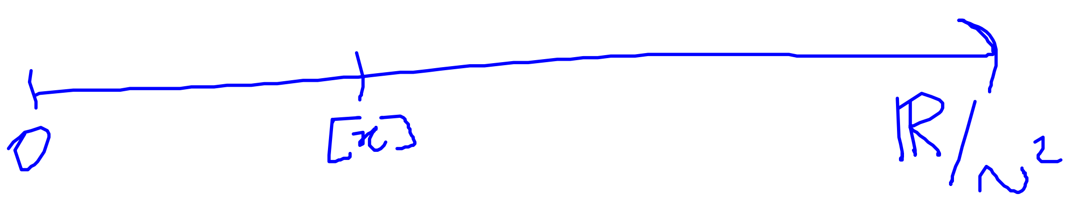
$$\boxed{\sim^2 \subseteq \mathbb{R}^2}$$

$[4] = \{ y : y^2 = 16 \}$
$= \{ 4, -4 \}$

$[0] = \{ 0 \}$

$[x] = \{ x, -x \} = \{ y : y \sim^2 x \} = \{ y : y^2 = x^2 \}$





d) Auf P definieren wir $\oplus$

$$\boxed{[x] \oplus [y] := [x^2 + y^2]}$$

$$\oplus([x],[y]) = [x] \oplus [y]$$

$$\oplus : P \times P \longrightarrow P$$
$$([x],[y]) \longmapsto [x^2 + y^2]$$

i) Ist $\oplus$ wohldefiniert?

$[1] = [-1]$ $\quad\quad$ $[1] \oplus [2] = [-1] \oplus [2]$

$[2] = [-2]$

Allgemein

$$\boxed{x' \overset{2}{\sim} x \implies [x] \oplus [y] = [x'] \oplus [y]}$$

Beweis.

$x' \overset{2}{\sim} x \iff x'^2 = x^2$ (Def von $\overset{2}{\sim}$)

$$[x] \oplus [y] = [x^2 + y^2] = [x'^2 + y^2] = [x'] \oplus [y]$$

$[x] \boxed{+} [y] := [x+y]$

$[1] \oplus [2] = [3]$

$[1] \oplus [-2] = [-1] = [1] \neq [3]$ | Nicht wohldefiniert

ii) Ist $\oplus$ kommutativ?

$$[x] \oplus [y] = [y] \oplus [x]$$

Bew. $[x] \oplus [y] = [x^2+y^2] \overset{*}{=} [y^2+x^2] = [y] \oplus [x]$

* weil + ist kommutativ in $\mathbb{R}$

iii) Existiert ein neutrales Element?

· $[0]$?

$$[0] \oplus [1] = [0+1] = [1]$$

$$[0] \oplus [2] = [0+4] = [4]$$

$\forall x \neq 1, 0 \implies [x] \oplus [0] = [x^2] \neq [x]$

d.h. $[0]$ ist kein neutrales Element für $\oplus$

Es gibt kein neutrales Element!

$[e] \in P, \forall [x] \in P: [x] + [e] = [x]$?

Wenn es eine geben würde, dann muss $[e] = [0]$ sein, weil $[1] \oplus [0] = [1]$.

Aber für $x \neq 1$, $[x] \oplus [0] \neq [x]$,
Also ist $[0]$ nicht neutral für $\forall x$

Andere Option: wir suchen $[e]$:

$[x] \oplus [e] = [x] \iff x^2 = (x^2 + e^2)^2$

$\iff \pm x = x^2 + e^2 \iff e = \sqrt{-x^2 \pm x}$

Es kann nicht neutral für $\forall x$ sein!

e) $f: P \longrightarrow \mathbb{R}$

$f([x]) = |x|$

i) f Injektiv?

$x \neq y \implies f(x) \neq f(y) \iff f(x) = f(y) \implies x = y$

Beweisen wir $f([x]) = f([y]) \implies [x] = [y]$

$f([x]) = f([y]) \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow \pm x = \pm y$

$\Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x \sim^2 y \Leftrightarrow [x] = [y]$

dann ist f injektiv.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$\forall\, \omega \in \mathbb{R},\ \omega < 0 \Rightarrow f^{-1}(\{\omega\}) = \{[x] \in P : |x| = \omega\}$

$= \emptyset$

$f : P \longrightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

- injektiv
- surjektiv (der Wertebereich enthält nur positive Zahlen)

Wie lautet f^{-1}?

$f : P \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $[x] \longmapsto |x|$

$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow P$, $y \longmapsto [y]$

$$f^{-1}(f([x])) = f^{-1}(|x|) = [|x|] = [x]$$

Inverse: $f^{-1}(f([x])) = [x]$

Beisp.

$$f([-1]) = |-1| = 1$$

$$f([1]) = 1$$

$$f^{-1}(5) = [5] = \{-5, 5\}$$

22.) $f(x) = \sin x \quad , \; g(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = \mathbb{R}$

i) $(g - f)(x) = g(x) - f(x) = x^2 - \sin x \quad D_{g-f} = \mathbb{R}$

ii) $(f \cdot g)(x) = x^2 \sin x \qquad D_{fg} = \mathbb{R}$

iii) $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\sin x}{x^2} \qquad D_{f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

iv) $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$

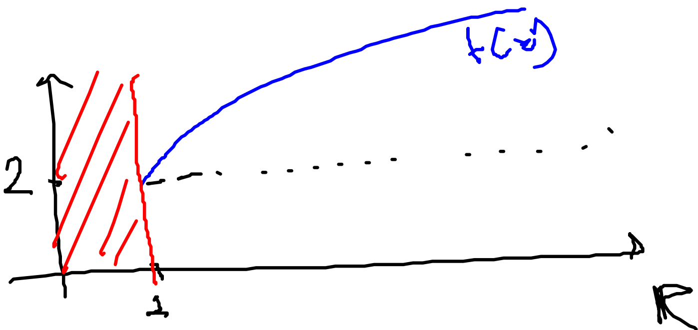
v) $g \circ f(x) = (\sin x)^2$

ist $f \circ g$ kommutativ? Nein.

23.) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$

(1) Definitionsbereich:

$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$ $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$



y beliebig, müssten wir $f(x) = y$ lösen:

$$\sqrt{x-1} + 2 = y \iff (x-1) = (y-2)^2$$

$$\iff x = 1 + (y-2)^2 \qquad f^{-1}(y) = 1 + (y-2)^2$$

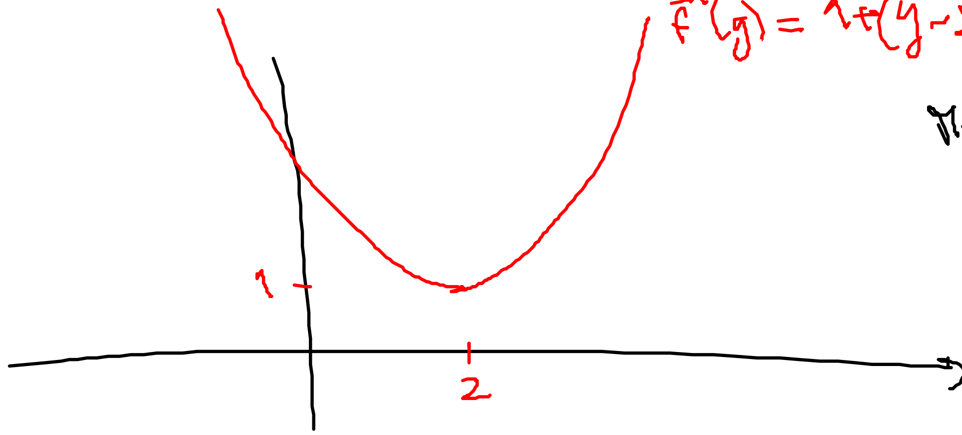
· Wertebereich von $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\}$

$f : \{x \geq 1\} \longrightarrow \{y \geq 2\}$

wenn man f^{-1} als Inverse von f sieht $D_f = \{y \geq 2\}$

. Definitionsbereich von f^{-1}

$f^{-1}(y) = 1 + (y-2)^2$



Maximaldefinitions-bereich:

$\mathbb{R}$