21.01

M Menge mit n Elemente

$k \in \mathbb{N}_0$

Wie viele k-elementige Teilmenge $A \subseteq M$ gibt es?

Bsp.

(1) $M = \{a, b\}$ $n=2$

k

0 Elemente = nur 1 (leere Menge) $\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!\,2!} = 1$

Teilmenge mit 1 El. $\{a\}, \{b\}$ = 2 Teilmengen $\binom{2}{1} = 2$

Teilmenge mit 2 El. $\{a, b\}$ = 1 Teilmenge $\binom{2}{2} = 1$

Aufgabe 42

Anzahl der k-elementigen Teilmenge von einer n-elementige Menge $= \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$M = \{1, 2, \ldots, 10\}$

Es gibt $\binom{10}{1} = 10$ Teilmenge mit 1 Element

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{10\}$

Beweis (Induktion über n)

Induktionsanfang $n = 0$:

Sei M eine 0-elementige Menge, dann ist $M = \{\ \}$

Falls $k = 0 \Rightarrow$ Es gibt 1 Teilmenge mit 0 Elem.

$k > 0 \Rightarrow$ 0 Teilmenge mit k Elem.

Aber $\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k>0 \end{cases}$ d.h. Anzahl der k-elem. Teilmenge $=\binom{0}{k}$

Induktionsbehauptung $n \longrightarrow n+1$

Wir nehmen an dass es gibt $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmenge von einer n-elementige Menge.

Zu zeigen

Es gibt $\binom{n+1}{k}$ k-elementige Teilmenge von einer (n+1)-elementige Menge

Beweis

Sei M_{n+1} eine (n+1)-elementige Menge

$$M_{n+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$$

und sei $A \subseteq M_{n+1}$ eine k-elementige Teilmenge

- $k > n+1 \implies 0 = \binom{n+1}{k}$
- $k = 0 \implies 1 = \binom{n+1}{0}$
- $1 \leq k \leq n+1$
  - (a) $a_{n+1} \notin A \implies A \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\} \implies \binom{n}{k}$ Teilmenge (I.V.)
  - (b) $a_{n+1} \in A \implies A' = A \setminus \{a_{n+1}\}$
    - A' hat $(k-1)$ elem.
    - $A' \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$

    $\implies \binom{n}{k-1}$ Teilmenge

$$\implies \underset{(a)}{\binom{n}{k}} + \underset{(b)}{\binom{n}{k-1}} = \binom{n+1}{k}$$

(Aufgabe 40b)

$\square$

44

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}\, a_k \end{cases} \qquad \text{(Rekursionsvorschrift)}$$

(a) Geben Sie $f_5(x)$ an

$$f_5(x) = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{5} x^4 + \frac{1}{6} x^5$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2}{3} \cdot \overbrace{\frac{1}{2}}^{a_1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_2} = \frac{1}{4} \qquad a_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \qquad a_5 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

(b) Vermutung $a_k = \dfrac{k}{k+1} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k+1}$?

Beweisen dass $a_k = \dfrac{1}{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}_0$

Beweis (Induktion über k)

$\underline{k=0}$ $\quad a_0 = 1 = \dfrac{1}{0+1}$ ✓

$\underline{k \to k+1}$ $\quad$ Wir nehmen an dass $a_k = \dfrac{1}{k+1}$ und berechnen

$$a_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}\, a_k \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{k+1}{k+2} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2}$$

$\square$

45 Beweise dass

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$$

Beispiele

$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$

$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$

Beweis (Induktion über n)

$\boxed{n=0}$ $\quad (1+x)^0 = 1 \quad \rightleftharpoons \quad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k = \binom{0}{0} \cdot x^0 = 1$

$\boxed{n \longrightarrow n+1}$ $\quad$ Wir nehmen an dass $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

und zeigen dass

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

Beweis.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) (1+x)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}_{①} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}}_{②}$$

①. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k - \overbrace{\binom{n}{n+1}}^{=0} x^{n+1}$$

$k = n+1$

$$\left(\binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x + \ldots + \binom{n}{n} x^n = \binom{n}{0} x^0 + \ldots + \binom{n}{n+1} x^{n+1} - \binom{n}{n+1} x^{n+1} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k$$

② $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$$

Jetzt:

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$$

$$= \binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{\frac{n!}{0!\,n!} = 1 = \binom{n+1}{0}} x^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{\binom{n+1}{k}} x^k \quad \text{(Aufgabe 4a b)}$$

$$= \binom{n+1}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

$\square$

ⓑ Formel für $(a+b)^n$, $(a-b)^n$

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

$$= a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k$$

(c) $(1+x^2)(1-2x)^5 = ?$

$$(1-2x)^5 = \underbrace{\binom{5}{0}(-1)^0 \cdot 1^5 \cdot (2x)^0}_{k=0} + \underbrace{\binom{5}{1}\cdot(-1)^1 \cdot 1^4 \cdot (2x)^1}_{k=1}$$

$$+ \underbrace{\binom{5}{2}\cdot(-1)^2 \cdot 1^3 \cdot (2x)^2}_{k=2} + \underbrace{\binom{5}{3}(-1)^3 \cdot 1^2 \cdot (2x)^3}_{k=3}$$

$$+ \underbrace{\binom{5}{4}(-1)^4 \cdot 1^1 (2x)^4}_{k=4} + \underbrace{\binom{5}{5}(-1)^5 \cdot 1^0 \cdot (2x)^5}_{k=5}$$

$$= 1 - 5\cdot 2x + 10 \cdot 4x^2$$

$$- 10 \cdot 8x^3 + 5 \cdot 16x^4 - 1 \cdot 32x^5$$

$$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$$

$$(1+x^2)(1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5)$$

$$(1+x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

$a_k = 0 \quad k > 2$ $\qquad$ $b_k = 0 \quad k > 5$

	a_0 (1)	a_1 (0)	a_2 (1)	a_3 (0)	a_4 (0)	a_5 (0)
b_0 1	1	0	1	0	0	0
b_1 −10	−10	0	−10	0	0	0
b_2 40	40	0	40	0	0	0
b_3 −80	−80	0	−80	0	0	0
b_4 80	80	0	80	0	0	
b_5 −32	−32	0	−32	0	0	0
b_6 0	0	0	0	0	0	

. . . .

Cauchy-Produkt

$1 + -10x + 41x^2 + -90x^3$

$+ 120x^4 - 112x^5 + 80x^6 - 32x^7$