Übung zur Nachklausurvorbereitung:

07.04.2014.

Klausur vom 11.02.2014

A3 Gegeben: $f(x) = e^{p(x)} - 1$, $p(x) = \frac{x}{x+1}$ mit $f: \underbrace{[0, +\infty[}_{=D_f} \to \mathbb{R}$

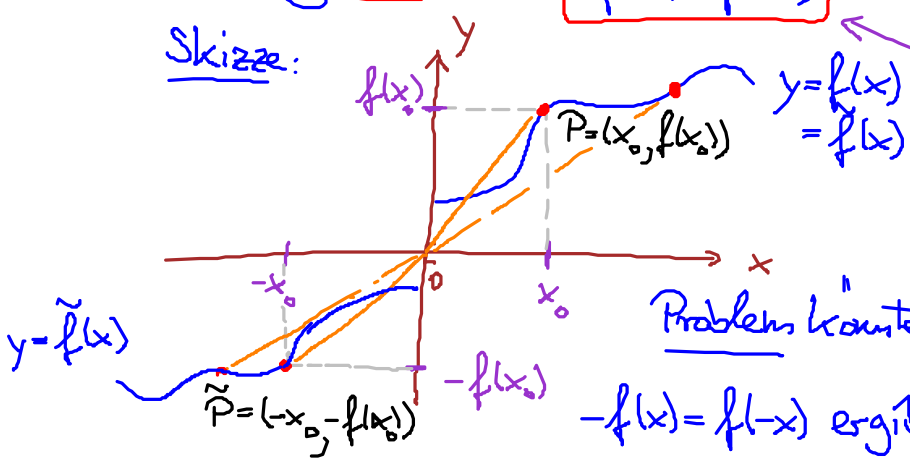
a) Gefragt: Ungerade Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f.
Gibt es Probleme für $x_0 = 0$?

Lösung: (i) gerade Fkt. : $\boxed{f(x) = f(-x)}$

(ii) ungerade Fkt. : $\boxed{-f(x) = f(-x)}$

Hier wichtig!! „Schlüssel" für $\tilde{f}$!

Skizze:



$\tilde{f}(-x_0) = -f(x_0)$

Problem könnte sein: $f(0) \neq 0$. Denn:

$-f(x) = f(-x)$ ergibt für $x = 0$:

$-f(0) = f(-0) = f(0) \Rightarrow 0 = 2 f(0)$ $\quad +f(0)$ $\Rightarrow f(0) \overset{!!}{=} 0$

Konkret hier:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \geq 0 \\ -f(-x) & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{\frac{x}{x+1}} - 1 & , x \geq 0 \\ -\left(e^{\frac{-x}{-x+1}} - 1\right) & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{\frac{x}{x+1}} - 1 & , x \geq 0 \\ -e^{\frac{+x}{+x-1}} + 1 & , x < 0 \end{cases}$$

Substitution

$f(x) = e^{p(x)} - 1 = e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \quad (x \geq 0) \Rightarrow f(0) = e^{\frac{0}{0+1}} - 1 = e^0 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ kein Problem in $x_0 = 0$.

Also lautet die ungerade Fortsetzung
$\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f:

$$\boxed{\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x+1}} - 1 & , x \geq 0 \\ -e^{\frac{x}{x-1}} + 1 & , x < 0 \end{cases}}$$

c) Berechne $p(z)$ für $z=1-i$.

Lösung: $p(z)=\frac{z}{z+1} \Rightarrow \boxed{p(1-i)} = \frac{1-i}{(1-i)+1} = \frac{1-i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} = \frac{(1-i)(2+i)}{4-i^2}$

$$= \frac{2+i-2i-i^2}{4-i^2} \underset{i^2=-1}{=} \frac{2-i+1}{4+1} = \boxed{\frac{3-i}{5}}$$

$\Rightarrow \mathrm{Re}[p(1-i)]=\frac{3}{5}$, $\mathrm{Im}[p(1-i)]=-\frac{1}{5}$

Außerdem: $\boxed{|p(1-i)|} = \sqrt{\underbrace{\left(\tfrac{3}{5}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{5}\right)^2}_{=\mathrm{Re}^2+\mathrm{Im}^2}} = \sqrt{\frac{9+1}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

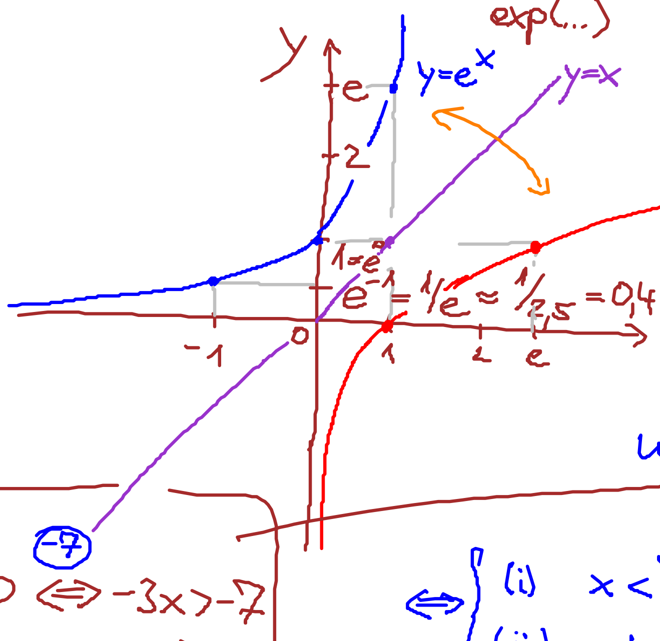
A2 $f(x)=\ln\left(\frac{14x+11}{7-3x}\right) = \ln(u)$ mit $u=\frac{14x+11}{7-3x}$

a) Definitionsbereich D_f bestimmen.

Lösung: Für den Logarithmus „ln" gilt, dass $\ln(u)$ nicht für $u\leq 0$ definiert ist, oder positiv ausgedrückt: nur für $u>0$ definiert!!

Begründung:

$y=\ln(x) \overset{\exp(\ldots)}{\Longleftrightarrow} \boxed{e^y = e^{\ln(x)} = x} > 0$, da Potenzen mit positiver Basis immer positiv sind!! Hier: Basis $e\approx 2{,}71>0$



y=ln(x)

Somit muss für x gelten, damit $f(x)=\ln\left(\frac{14x+11}{7-3x}\right)$ definiert ist:

$u=\boxed{\frac{14x+11}{7-3x}>0} \Leftrightarrow$ (i) $7-3x>0$, (ii) $4x+11\neq 0$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{(i)} & x<\frac{7}{3}\\ \text{(ii)} & x\neq-\frac{11}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{D_f = \left]-\infty,-\frac{11}{4}\right[\cup \left]-\frac{11}{4},\frac{7}{3}\right[}$

„vereinigt"

NR:

$7-3x>0 \Leftrightarrow -3x>-7$ | -7

$\Leftrightarrow 3x<7 \Leftrightarrow x<\frac{7}{3}$ | $\cdot(-1)$ | $:3$

0 $\quad$ 7/3 $\quad$ $\mathbb{R}$

$-11/4$

b) Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichung $f(x)=\ln\left(\frac{|4x+11|}{7-3x}\right)>0$?

Lösung: Man sieht anhand des Graphen der Logarithmusfunktion $\ln(u)>0 \iff \boxed{u>1}$ für $u=\frac{|4x+11|}{7-3x}$

Also muss gelten: $\boxed{\frac{|4x+11|}{7-3x}>1}$.

Dazu brauchen wir eine Fallunterscheidung unter Berücksichtigung von $\boxed{|a| = \begin{cases} a & , a\geq 0 \\ -a & , a<0 \end{cases} = \sqrt{a^2}}$

Tabelle:

	$]-\infty,-\frac{11}{4}[$	$]-\frac{11}{4},\frac{7}{3}[$	$]\frac{7}{3},+\infty[$
$4x+11$	<0	>0	>0
$7-3x$	>0	>0	<0

fällt weg, da schon nicht mehr im Definitionsbereich D_f aus Teil (a)

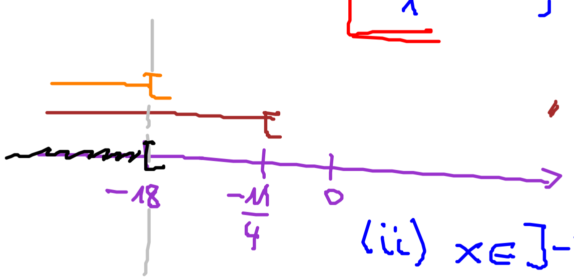
(i) $x\in\,]-\infty,-\frac{11}{4}[$: $\underbrace{4x+11}_{u}<0$, $7-3x>0$. Dann

$$\frac{|4x+11|}{7-3x}=\frac{-\overbrace{(4x+11)}^{u}}{7-3x}>1 \iff -(4x+11)>(7-3x) \quad \cdot(7-3x)$$

$$\iff -4x-11>7-3x \iff -x>18 \iff \boxed{x<-18}$$
$+3x+11 \qquad \cdot(-1)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{L}_1=\,]-\infty,-\tfrac{11}{4}[\,\cap\,]-\infty,-18[\,=\,]-\infty,-18[}$$

„geschnitten"



(ii) $x\in\,]-\frac{11}{4},\frac{7}{3}[$: $4x+11>0$, $7-3x>0$. Dann

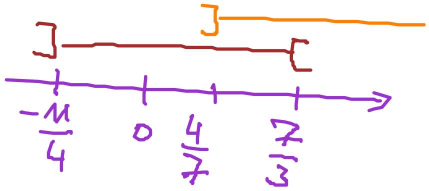
$$\frac{|4x+11|}{7-3x}=\frac{+(4x+11)}{7-3x}>1 \iff 4x+11>7-3x \quad \cdot(7-3x)$$

$-4x-7$

$\iff -4 > -7x \iff \frac{4}{7} < x$

$:(-7)$

$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \left]-\frac{11}{4}, \frac{7}{3}\right[\cap \left]\frac{4}{7}, +\infty\right[= \left]\frac{4}{7}, \frac{7}{3}\right[$



Dann: $\boxed{\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left]-\infty, -18\right[\cup \left]\frac{4}{7}, \frac{7}{3}\right[}$

ENDE des Extra-Übung !!!